MATEMATIK | **Hjälpmedel: medföljande formelblad**

Göteborgs Universitet | Datum: 2010-01-16 kl. 08.30–13.30

Tentamen | Telefonvakt: Aron Lagberg.

tel. 076 272 18 61

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x, y); a \le x \le b, c \le y \le d\}$ så är f integrerbar över Δ. (3p)

2. Bevisa Abels partiella summationsformel: (3p)
$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_n - a_{m+1}B_m + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k \text{ där } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

3. Antag att (f_n) är en föjd C^1-funktioner på ett intervall $I =]a, b[$ som konvergerar i minst en punkt i I. Visa att om då (f'_n) konvergerar likformigt på I så konvergerar (f_n) likformigt på I mot en C^1-funktion f med $f' = \lim_{n\to\infty} f'_n$ (4p)

4. Beräkna trippelintegralen $\iiint_D z\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$, där D är området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \le z \le 1$. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_C (yz + \frac{1}{1 + x^2})dx + xzdy + (xy + 2z)dz$, där C är spiralen $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ från $t = 0$ till $t = \pi$. (3p)

6. Avgör för vilka reella x som potenserien $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{(n-1)!} + 1)x^{2n}$ är konvergent. Bestäm också seriens summa uttryct i elementära funktioner. (3p)

7. Beräkna flödet av fältet $(xy^2, yz^2, 0)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. (3p)

8. Visa att funktionsföljden $f_n(x) = n^2 \cos \frac{x}{n} - n^2$ konvergerar likformigt på intervallet [0,1] och bestäm $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$