MATEMATIK **Hjälpmedel: medföljande formelblad**

Göteborgs Universitet Datum: 2010-06-01 kl. 08.30–13.30

Tentamen Telefonvakt: David Witt Nyström.

tel. 076 272 18 61

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med ett potentialfält i ett öppet område $\Omega \in \mathbf{R^2}$. (3p)

   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält med potential av klass C^2 i Ω så är $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i Ω.

2. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)
   (Triangelolikheten för absolutkonvergenta serier får anses bekant.)

3. Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig i $\{(x, y) : \alpha(x) \le y \le \beta(x), a \le x \le b\}$. (4p)
   Visa att $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy$ är kontinuerlig för $a \le x \le b$ om

   (a) $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$ för $a \le x \le b$.

   (b) $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga för $a \le x \le b$.

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C (x + y)dx + xydy$ där C är bågen från (1,0) till (0,1) längs enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. (3p)

5. Avgör för vilka reella x som potenserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{2^n} x^n$ är konvergent. Bestäm också seriens summa uttryct i elementära funktioner. (3p)

6. Beräkna arean av den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som bestäms av olikheterna $z > 0$, och $x^2 + y^2 < 2y$ (3p)

7. Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(x + n) - \arctan(1 + n))$ konvergerar mot en funktion med kontinuerlig derivata i intervallet $]0, \infty[$. (3p)

8. Vilket är det största möjliga värdet som ytintegralen $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dS$ kan få om S är en sluten yta med normalriktning utåt och $\boldsymbol{F} = (y - x^3, -yz^2, z(1 - y^2))$? (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n)\ , \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$