

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

1. Formulera och bevisa Greens formel. (3p)

2. Antag att \mathbf{F} är ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω . Visa att om kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen för alla kurvor $\gamma \in \Omega$ så har \mathbf{F} en potential i Ω . (3p)

3. Antag att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ är en funktionsföljd definierad i på en mängd M (i \mathbb{R}^N eller C). (4p)

(a) Definiera vad som menas med att $f_n \rightarrow f$ likformigt på M .

(b) Visa att om $f_n \rightarrow f$ likformigt på M och f_n kontinuerlig för varje n , så är också f kontinuerlig.

4. Beräkna dubbelintegralen (3p)

$$\iint_D (x - 2y)(2x + 3y)^{1/3} dx dy$$

där D är parallelogrammen med hörn i $(2, -1)$, $(4, 0)$, $(1, 2)$ och $(-1, 1)$.

5. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{1 + n^2} z^n$? (3p)

6. Beräkna ytintegralen (3p)

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$$

där S är konen $x^2 + y^2 = a^2 z^2 / b^2$, $0 \leq z \leq b$.

7. Bestäm den slutna kurva γ utan dubbelpunkter, så att kurvintegralen (3p)

$$\int_{\gamma} 6xy dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$

blir så stor som möjligt då γ genomlöps medurs.

8. Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x + x^2 + \dots + x^n} dx$ (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\end{aligned}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+a} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. & \int \frac{1}{x^2-a} dx &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|, \quad a > 0. \\ \int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|, \quad a > 0. \\ \int \sqrt{x^2+a} dx &= \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)\end{aligned}$$

Malaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x) \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)\end{aligned}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n), \quad \text{där } \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$