MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Hjälpmedel: medföljande formelblad
Datum: 2011-01-08 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Adam Andersson.
tel.

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Antag att f är en integrerbar funktion på rektangeln D: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. (3p)
   Visa att $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$, givet att enkelintegralerna existerar.

2. Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (3p)

3. (a) Definiera vad som menas med att en funktionsföljd konvergerar likformigt på ett intervall $[a,b]$. (4p)
   (b) Visa att om $f_n \to f$ likformigt på $[a,b]$ och f_n är kontinuerlig för varje n så är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
   Att gränsfuktionen f är kontinuerlig får anses bekant.

4. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xdxdy$ där D är cirkelsegmentet som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 2$ och $x \geq 1$. (3p)

5. Beräkna flödet upp genom halvsfären $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ av $\nabla\phi$ om $\phi = x^2 + xy + y^2 + z$. (3p)

6. Beräkna $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+x} 2^{n(x-1)}$. (3p)

7. Bestäm konvergensintervallet samt summan av potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+3)x^n$ (3p)

8. Beräkana kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$, där γ är kurvan $\boldsymbol{r} = (1+\cos t, 1+\sin t, 1-\cos t-\sin t)$ för $0 \leq t < 2\pi$ och $\boldsymbol{f} = (ye^x, x^2+e^x, z^2e^z)$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$