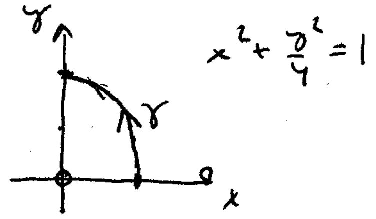
Lösningar, Flervariabel, del 2, 070604.

4\. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy$,



Sätt $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{-x}{x^2+y^2}$

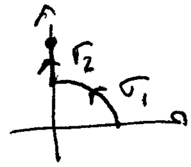
Då är

$$\left.\begin{aligned} Q'_x &= \frac{-1\cdot(x^2+y^2) - (-x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ P'_y &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{lika i } \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$$

Alt.1 Enligt Greens formel kan vi byta integrationsväg:

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, där γ_1: $x^2+y^2=1$ från $(1,0)$ till $(0,1)$

γ_2: $x = 0$, $1 \le \overrightarrow{y} \le 2$.



På γ_1: $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta$
$y = \sin\theta$, $dy = \cos\theta$
$0 \le \overrightarrow{\theta} \le \frac{\pi}{2}$

Dvs

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} y\,dx - x\,dy = \int_0^{\pi/2} -\sin^2\theta - \cos^2\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \begin{bmatrix} dx = 0 \\ x = 0 \end{bmatrix} = \int_{\gamma_1} P\cdot 0 - 0\cdot dy = 0$$

$$\therefore \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1+\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$$

Alt 2. Vi bestämmer en potential U: $U'_x = P$, $U'_y = Q$

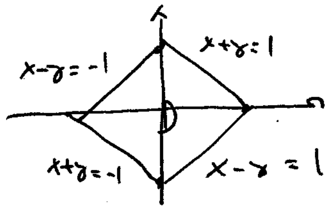
$$\begin{aligned} U'_x &= \frac{y}{x^2+y^2} \\ U'_y &= \frac{-x}{x^2+y^2} \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} U &= \arctan(x/y) & (y \neq 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(y/x) & (y = 0) \end{aligned}\right.$$

Alltså är

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(0,2) - \underbrace{U(1,0)}_{\left(\lim\limits_{x=1,\,y\to 0^+} \arctan\frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}\right)} = 0 - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$$

5. Beräkna

$$I = \iint_D \frac{\ln(2+x+y)}{1+(x-y)^2}\,dx\,dy$$



Sätt $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ $\quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $\quad D \to E: \begin{matrix} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{matrix}$

Dvs $\quad dx\,dy = \frac{1}{2}\,du\,dv$.

och:

$$I = \iint_E \frac{\ln(2+u)}{1+v^2}\,du\,dv = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+v^2}\,dv \int_{-1}^{1} \ln(2+u)\,du$$

$$= \Big[\arctan v\Big]_{-1}^{1} \cdot \left(\Big[(2+u)\ln(2+u)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} du \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\cdot(3\ln 3 - 2)}}$$

---

6. a) $u_n(x) = x e^{-n^2 x}$, $\quad M = [0, \infty[$

$u_n'(x) = 1\cdot e^{-n^2x} - n^2 x e^{-n^2 x} = (1-n^2x)e^{-n^2x} \quad = 0$ om $x = \frac{1}{n}$

		$1/n$	
u_n'	$+$	0	$-$
u_n	$\nearrow$		$\searrow$

Dvs 1) $|u_n(x)| = u_n(x) \le u_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}e^{-n}$ alla $x \in M$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n}$ är konvergent

Enligt Weierstrass Majorantsats är $\sum_{n=1} u_n(x)$ likformigt konv. på M.

b) Sätt $f_n(x) = n\sin\frac{x}{n}$, $\quad x \in M = [-1, 1]$

$= x \cdot \frac{\sin x/n}{x/n} \to x\cdot 1$ då $n \to \infty$ $\quad (t = \frac{x}{n} \to 0)$

Vi undersöker $\quad g_n(x) = f_n(x) - x$

$g_n'(x) = \cos\frac{x}{n} - 1$

		0	
g_n'	$-$	0	$-$
g_n	$\searrow$		$\searrow$

$\therefore \quad d_n = \max_{-1\le x\le 1} |g_n(x)| = \max(|g_n(-1)|, |g_n(1)|) = 1 - n\sin\frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$

Alt. Taylorutveckla: $|n\sin\frac{x}{n} - x| = |n\cdot(\frac{x}{n} + B(\frac{x}{n})\frac{x^3}{n^3}) - x| \le \frac{C}{n^2} \to 0$

Alltså gäller att $f_n \to f$ likformigt på M, $f(x) = x$.

7. För vilka z konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} z^{2n}$?

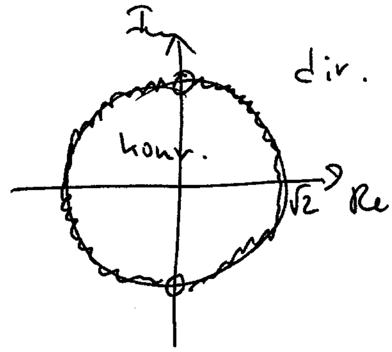
Sätt $a_n(z) = \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} z^{2n}$

Då är $|a_n(z)|^{1/n} = \frac{2}{n^{1/2n}} \cdot |z|^2 \to 2\cdot|z|^2$ då $n \to \infty$

Enligt rotkriteriet är serie konvergent om $2\cdot|z|^2 < 1$

divergent $2\cdot|z|^2 > 1$

Alltså är konvergensradie $R = 1/\sqrt{2}$.



För $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ är $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$.

och $a_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{2} e^{i2\theta}\right)^n$

$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e^{i\pi} \cdot e^{i2\theta}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{i(2\theta+\pi)n}$

För $2\theta + \pi \neq m \cdot 2\pi$ så gäller $\left|\sum_{k=0}^{n} e^{i(2\theta+\pi)k}\right| \le \frac{1}{|\sin(\theta+\frac{\pi}{2})|}$

ob. av n

och eftersom $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$ följer av

Dirichlets test att $\sum a_n(z)$ är konvergent om

$(2\theta + \pi \in [\pi, 5\pi])$, $2\theta + \pi \neq 2\pi$, $\neq 4\pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

dvs $z \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} = \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i3\pi/2} = \frac{-i}{\sqrt{2}}$

För $z = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ är $z^2 = -\frac{1}{2}$ och $a_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

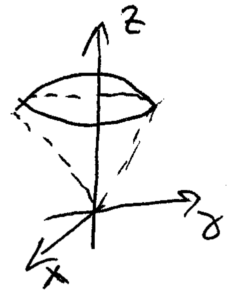
Men $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ är divergent.

Svar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}} z^{2n}$ är konvergent om.m

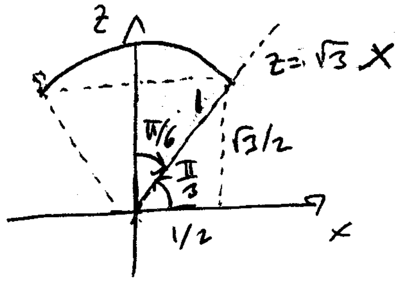
$|z| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z \neq \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$

8. Beräkna

$$I = \iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \quad , \quad D: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ z \ge \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



En rymdpolär beskrivning av D är



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2\sin^2\theta .$$

Alltså är

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 r^2 \cdot r^2\,dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin^3\theta\,d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot \int_0^{\pi/6} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = \begin{bmatrix} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta\,d\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_1^{\sqrt{3}/2} (1-t^2)(-dt) = \frac{2\pi}{5}\cdot\int_{\sqrt{3}/2}^1 (1-t^2)\,dt$$

$$= \frac{2\pi}{5}\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{\sqrt{3}/2}^1 = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{60}\left(\frac{2}{3}\cdot 24 - 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{60}(16 - 9\sqrt{3})}}$$