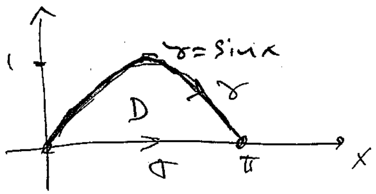
Lösningar: Flervariabelanalys, del2, MAN050

2007-08-28

4.

$$\int_\gamma \underbrace{(4y+xe^{x^2+y^2})}_{=P}\,dx + \underbrace{(3x+ye^{x^2+y^2})}_{Q}\,dy$$



$\partial D = \sigma - \gamma$ (pos. orientering)

$\sigma:\ 0 \le x \le \pi,\ y = 0.$

P och Q är C^1

Enligt Greens formel är

$$I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\sigma P\,dx + Q\,dy - \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

På σ är $P = xe^{x^2}$ och $dy = 0$

dvs $\int_\sigma P\,dx + Q\,dy = \int_0^\pi x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big]_0^\pi = \frac{1}{2}(e^{\pi^2}-1).$

$$\left.\begin{aligned} Q'_x &= 3 + 2xy\,e^{x^2+y^2} \\ P'_y &= 4 + 2xy\,e^{x^2+y^2} \end{aligned}\right| \quad Q'_x - P'_y = -1.$$

Dvs

$$-\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \iint_D 1\cdot dx\,dy = \text{area av } D = \overbrace{\int_0^\pi \sin x\,dx}^{\text{area under grafen}} =$$

$$= [-\cos x]_0^\pi = 2$$

Svar $\displaystyle\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{2}e^{\pi^2} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2}e^{\pi^2} + \frac{3}{2}$

5. $\vec{u} = (\alpha z^2,\ y^2,\ (2x+1)z)$

$\vec{u}$ är ett konservativt fält om det finns en potential φ sådan att $\vec{u} = \nabla\varphi = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z)$

Vi undersöker:

$$\varphi'_x = \alpha z^2 \Rightarrow \varphi = \alpha x z^2 + f(y,z)$$ ob. av x

Då är

$$\varphi'_y = 0 + f'_y = y^2 \iff f = \tfrac{1}{3}y^3 + g(z)$$ ob. av y (& x

Dvs $\varphi = \alpha x z^2 + \frac{1}{3}y^3 + g(z)$ och vi får

$$\varphi'_z = 2\alpha x z + g'(z) = (2x+1)z$$

Dvs

$$g'(z) = 2xz(\alpha-1) + z$$

VL är oberoende av x $\iff$ HL ob. av x $\iff$ $\alpha = 1$

och $g'(z) = z$, $\iff$ $g(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$

Dvs $\vec{u}$ är konservativt precis då $\alpha = 1$

och $\vec{u} = \nabla\varphi$ där $\varphi = xz^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}z^2 + C$

Arbetet som utförs längs med kurvan γ är

$$\int_\gamma \vec{u}\cdot d\vec{r} = \overset{\text{slut}}{\varphi(0,1,0)} - \overset{\text{start}}{\varphi(0,-1,0)} =$$

$$= 0 + \tfrac{1}{3} + 0 - (0 - \tfrac{1}{3} + 0) = \frac{2}{3}$$

6. Vi undersöker potensserie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}}_{=a_n} z^n .$$

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3} = e^{n^3 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)} \overset{*}{=} e^{-\frac{n}{2} + B\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

$*$ $\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + B\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^4}$, $\ln(1+t) = t + B(t)\,t^2$ $\Bigg\}$ $\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + B\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^4}$

Alltså är

$$\sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{1}{2} + B\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}} \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad n\to\infty$$

Konvergensradie för potensserie är $R = 1/\frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{e}$

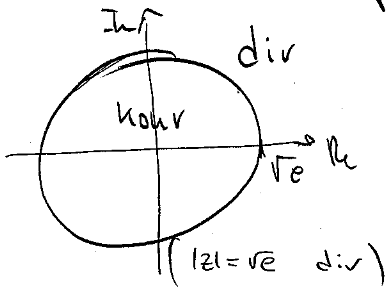
Dvs den konvergerar för $|z| < \sqrt{e}$, divergerar för $|z| > \sqrt{e}$

Hur är det för $|z| = \sqrt{e}$?

$$|a_n \cdot z^n| = |a_n|\,|z|^n = e^{-\frac{n}{2} + B\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{n}{2}} = e^{B\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$\longrightarrow e^0 = 1 \neq 0 \quad \text{då } n\to\infty$$

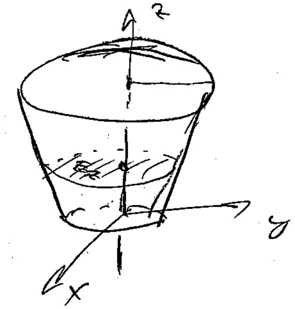
Eftersom termerna i serie i detta fall inte går mot noll så följer det att den divergerar



Svar: Potensserien konvergerar om $|z| < \sqrt{e}$

7. $$\iiint_D (x+y^2+z^3)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \left(\iint_{E_z} (x+y^2+z^3)\,dx\,dy\right)dz$$

D: $0 \le z \le 3$, E_z: $x^2+y^2 \le 1+z$



Vi beskriver E_z i polära koordinater.

$x = r\cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$y = r\sin\theta$, $0 \le r \le \sqrt{1+z}$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\iint_{E_z} (x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{1+z}} r \int_0^{2\pi} (r\cos\theta + r^2\sin^2\theta)\,d\theta\,dr =$$

$$= \int_0^{\sqrt{1+z}} r\left(r\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{=0} + r^2\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\,d\theta\right)dr = \int_0^{\sqrt{1+z}} \pi r^3\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{4} r^4\Big]_0^{\sqrt{1+z}} = \frac{\pi}{4}(1+z)^2$$

$$\iint_{E_z} z^3\,dx\,dy = z^3\cdot \text{area av } E_z = z^3\cdot\pi(\sqrt{1+z})^2 = \pi z^3(1+z) = \pi(z^3+z^4).$$

Till sist

$$\iiint_D (x+y^2+z^3)\,dx\,dy\,dz = \pi\int_0^3 \left(\frac{1}{4}(1+z)^2 + z^3 + z^4\right)dz$$

$$= \pi\left[\frac{1}{12}(1+z)^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5\right]_0^3 = \left(\frac{21}{4} + \frac{81}{4} + \frac{243}{5}\right)\pi$$

$$= \pi\left(\frac{51}{2} + \frac{243}{5}\right) = \frac{741\pi}{10}$$

8. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x/k} \cdot e^{-k/x}$, $x > 0$

Sätt $u_k(x) = e^{-x/k} \cdot e^{-k/x}$, $x > 0$

$\lim_{x \to 0^+} u_k(x) = 1 \cdot \lim_{x \to 0^+} e^{-k/x} = 0$.

Vi definierar $u_k(0) = 0$, då är u_k kont. för $x \geq 0$

$u_k' = \frac{d}{dx} e^{-(\frac{x}{k} + \frac{k}{x})} = e^{-(\frac{x}{k} + \frac{k}{x})} \cdot (-\frac{1}{k} + \frac{k}{x^2}) = 0$ omm $\underline{\underline{x=k}}$.

Vi har

x		R	k	
u_k'	$+$		0	$-$
u_k	$\nearrow$		max	$\searrow 0$

Vs om $k > R$ gäller för $0 \leq x \leq R$ att

$$0 \leq u_k(x) \leq u_k(R) = e^{-R/k} \cdot e^{-k/R} \leq 1 \cdot (\underbrace{e^{1/R}}_{=a})^{-k} , \quad a > 1.$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k}$ är konvergent så följer av Weierstrass Majorantsats att $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt på $[0, R]$.

Härav följer också att $f(x)$ är kontinuerlig för $x \geq 0$ och $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = \underline{\underline{0}}$

På intervallet $[0, \infty[$ gäller att

$$\sup_{x \geq 0} u_k(x) = u_k(k) = e^{-k/k} \cdot e^{-k/k} = e^{-2}$$

som ju inte går mot noll då $k \to \infty$ och därmed konvergerar funktionsserien inte likformigt på $[0, \infty[$