Lösningar till MMG 300, II
08 05 27

(4) Variabelbytet $\begin{cases} u = x-2y \\ v = 2x+5y \end{cases}$ ger $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{7}$ och

integralen $\frac{1}{7}\int_1^8 \left(\int_{-3}^4 u\,du\right) v^{1/3}\,dv = \frac{1}{7}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-3}^4 \left[\frac{3}{4}v^{4/3}\right]_1^8 = \underline{\underline{\frac{45}{8}}}$

(5) Gauss' sats ger $\iiint (4x^2+2yz)\,dx\,dy\,dz = [\text{cyl. koord.}] =$

$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (4r^3\cos^2\theta + 2r^2\sin\theta \cdot z)\,dz\right)d\theta\right)dr =$

$= [r^4]_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta + \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{2}{3}r^3\right]_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta}_{=0} = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi}}$

(6) $\left(\frac{1+3^n}{n^{1/3}}|z|^{4n}\right)^{1/n} = 3\,\frac{(3^{-n}+1)}{(n^{1/n})^{1/3}}\,|z|^4 \to 3|z|^4 < 1 \Leftrightarrow |z| < 3^{-4}$

Dvs $R = 3^{-4}$ och serien konv. för $|z| < 3^{-4}$, div. för $|z| > 3^{-4}$

För $|z| = 3^{-4}$ sätter vi $z = 3^{-4}e^{i\theta}$ och får serien

$\sum_1^\infty \frac{1+3^{-n}}{n^{1/3}} e^{4in\theta}$. Vi använder Dirichlets test.

$\frac{1+3^{-n}}{n^{1/3}} \searrow 0$. $\sum_1^n e^{ik\varphi}$ är begr. för $\varphi \neq m \cdot 2\pi$

Dvs serien konvergent för $4\theta \neq m \cdot 2\pi$ dvs $\theta \neq m\frac{\pi}{2}$

eller m.a.o. $z \neq \pm 3^{-4}$, $\pm 3^{-4}i$. I dessa punkter

får vi den divergenta serien $\sum_1^\infty \frac{1+3^{-n}}{n^{1/3}}$.

Svar: $\underline{|z| \leq 3^{-4},\ z \neq \pm 3^{-4},\ z \neq \pm 3^{-4}i}$

(7) Greens formel ger $\int_\gamma = -\int_{-\gamma} = -\iint_D \text{divergensen} =$

$= \iint_D (6x - 3x^2 - 3y^2)\,dx\,dy = 3\iint_D (1 - (x-1)^2 - y^2)\,dx\,dy$ som

är maximal då $D = \{(x,y) : 1-(x-1)^2-y^2 \geq 0\}$ dvs

då $(x-1)^2+y^2 \leq 1$. Alltså, γ är $\underline{\text{cirkeln } (x-1)^2+y^2=1, \text{ medurs}}$.

(8) Derivera: $f_n'(x) = \ldots = xn\sin\frac{x+n}{n^2} \to x$ punktvis för alla x.

Konvergensen är likformig på $[-R, R]$ ty

$\left| xn\sin\frac{x+n}{n^2} - x \right| = n|x|\left|\sin\frac{x+n}{n^2} - \frac{1}{n}\right| = (\text{Maclaurin}) =$

$= n|x| \cdot \left|\frac{x+n}{n^2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{x+n}{n^2}\right)^3 B\right| \leq (n > R) \leq \frac{|x|^2}{n} + \frac{|x|}{n^3}B \leq$

$\leq \frac{R^2}{n} + \frac{R}{n^3}B \to 0$ då $n \to \infty$.

Eftersom $f_n(0) = n^5\sin\frac{1}{n}$ så konvergerar

$f_n(x) - n^5\sin\frac{1}{n}$ i $x = 0$ (ty $= 0$ for varjen)

Satsen om derivering säger att $f_n - n^5\sin\frac{1}{n}$

konvergerar likformigt mot en funktion $f(x)$ med

$f'(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f_n(x) - n\sin\frac{1}{n}\right)' = x$

Dvs $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$ men $f(0) = \lim\,(f_n - n^5\sin\frac{1}{n})(0) = 0$

Svar: $\underline{a_n = n^5\sin\frac{1}{n} \text{ ger } f_n(x) - a_n \to \frac{x^2}{2} \text{ likformigt}}$