Lösningar till MMG 300, II, 080827

④ Konvergensradie: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,\frac{2^{-n-1}+1}{2^{-n}+1}\cdot\frac{1+n^2}{1+(n+1)^2} \to 2$

$R = \frac{1}{2}$ $\quad |z| = \frac{1}{2}$ ger

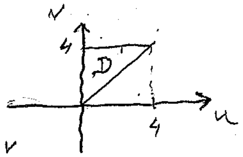
$|a_n z^n| = \frac{2^{-n}+1}{1+n^2} = \frac{1}{n^2}\,\overbrace{\frac{2^{-n}+1}{1/n^2+1}}^{\to 1}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ är konvergent.

Alltså är serien absolutkonvergent för $|z| = \frac{1}{2}$

Svar serien är konvergent för $\underline{|z| \le \frac{1}{2}}$

---

⑤ Variabelsubst. $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ ger området



D': fig. $\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$.

$I = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(\int_0^v e^{-u/v}\,du\right)dv = \frac{1}{2}\int_0^4 -v\left[e^{-u/v}\right]_{u=0}^{v} dv =$

$= \frac{1}{2}\int_0^4 (1-e^{-1})v = (1-\frac{1}{e})\left[\frac{v^2}{4}\right]_0^4 = \underline{4 - 4/e}$

---

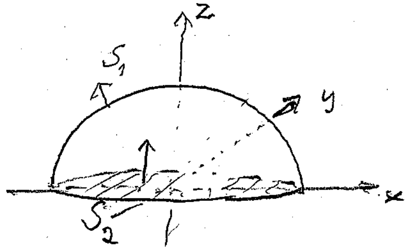
⑥ Parameterisering av ytan: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = \frac{b}{a}r \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{matrix}\right\} = D$

$|x_r' \times x_t'| = |(\cos t, \sin t, \frac{b}{a}) \times$
$\times(-r\sin t, r\cos t, 0)| = |(-\frac{b}{a}r\cos t, -\frac{b}{a}r\sin t, r)| = r\sqrt{1+b^2/a^2}$

$I = \iint_D r\cdot r\sqrt{1+b^2/a^2}\,dr\,dt = 2\pi\sqrt{1+b^2/a^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \underline{\frac{2\pi a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}}$

---

⑦ Sätt $S = S_1 - S_2$. Då är S sluten med normal utåt och



$\iint_{S_1} = \iint_S + \iint_{S_2}$

$\iint_{S_2} u\cdot N\,dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} (1, 2xy-1, x^2)(0,0,1)\,dx\,dy = [\text{polära koord}] =$

$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\right)d\theta = \frac{1}{4}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$

$\iint_S = [\text{Gauss sats}] = \iiint_{\frac{1}{2}\text{-klotet}} (2x-2z)\,dx\,dy\,dz = [\text{symmetri}] =$

$= -2\iiint z\,dx\,dy\,dz = [\text{sfäriska koord.}] = -2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\left(\int_0^1 r^3 dr\right)d\theta =$

$= -\pi\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}$. Därmed $\iint_S = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$

---

⑧ Sätt $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$. Då är $f_n' = \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$

vilket visar att $|f_n|$ har maximum för $|x| = n^{-1/2}$

Eftersom $|f_n(n^{-1/2})| = \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$ så följer att

$|f_n(x)| \le \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$ för alla x.

Vidare är $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ konvergent för $\alpha + 1/2 > 1$, dvs för $\alpha > 1/2$ och påståendet följer av Weierstrass' majorantsats.