Lösningar till MMG300, 090116

① b) Sats 3.5 i GLO

② sats 9.1 i P-B

③ sats 9.3 i P-B

④ Sfäriska koordinater ger

$$I = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^\infty \frac{r^3\sin\theta}{(r^2+a^2)^2}\,dr\right)d\theta\right)d\varphi =$$

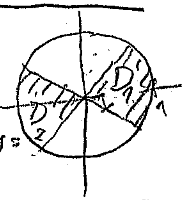
$$= \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta}_{=1}\int_0^\infty \frac{r^2}{(r^2+a^2)^2}\,dr = [P.I.] = \frac{\pi}{2}\underbrace{\left[\frac{r}{2}\frac{-1}{r^2+a^2}\right]_0^\infty}_{=0} + \frac{\pi}{4}\int_0^\infty\frac{1}{r^2+a^2}\,dr =$$

$$\frac{\pi}{4a}\left[\arctan\frac{x}{a}\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8a}$$

⑤ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_n+\frac{1}{n+1}}{a_n} = 1+\frac{1}{a_n(n+1)} \to 1$ då $n\to\infty$

eftersom ju $a_n\to\infty$ (harmoniska serien).
Altså, konvergensradien = 1. För $|z|=1$ får vi
$\sum_1^\infty |a_n z^n| = \sum_1^\infty a_n$ som är divergent då termerna ej $\to 0$. Svar: Konvergent då $|z|<1$

⑥ $z>0$ och $x^2+y^2\le 1$ ger området D i fig.



$D = D_1 \cup D_2$

Av symmetriskäl får vi

Arean $= 2\iint_{D_1}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = 2\iint_{D_1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy =$

$= [\text{Pol. koord.}] = 2\int_0^1\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\theta\right)$

$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}(5\sqrt5-1)$

⑦ För $x\ge 0$ är $0\le\frac{1}{(x+n)^2}\le\frac{1}{n^2}$ och eftersom $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent och oberoende av x så är serien likformigt konvergent. Vi vet då att f är kontinuerlig och

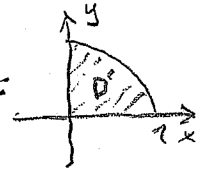
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx = \sum_1^\infty\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 =$$

$= \sum_1^\infty\left(\frac1n-\frac1{n+1}\right)$. Men $\sum_{n=1}^k\left(\frac1n-\frac1{n+1}\right) =$ (teleskopsumma) $=$

$= 1-\frac{1}{k+1}\to 1$ då $k\to\infty$. Dvs $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

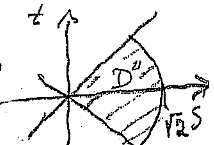
⑧ P.g.a. symmetrier är integralen =

$I = 4\iint_{D'}\frac{y^2-x^2}{(x+y)^n}\,dxdy$ där D' är som i fig:



Vi gör subst. $\begin{cases} s = y+x \\ t = y-x \end{cases}$, $\left|\frac{d(x,y)}{d(s,t)}\right| = \frac12$.

$I = 2\iint_{D''}\frac{t}{s^{n-1}}\,dsdt$, där D'' är som i fig:



Polära koordinater ger, om integralerna existerar,

$$I = 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin\theta}{(\cos\theta)^{n-1}}\,d\theta\int_0^{\sqrt2}\frac{1}{r^{n-3}}\,dr$$

Den vänstra existerar för alla n och är $= 0$, ty udda funktion över symmetriskt intervall, Den högra är konvergent för $n-3<1$, dvs $n<4$.

Svar: Konvergent och $= 0$ för $n \le 3$