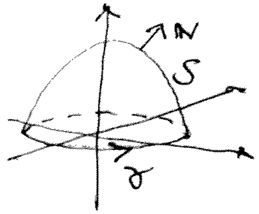
Lösningar till MMG300 II, 090602

(4) Randkurvan, γ, till ytan, S, utgörs av enhetscirkeln i xy-planet och har parameterframst.



$(x,y,z) = (\cos t, \sin t, 0)$

Stokes' sats ger då

$$\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot \mathbf{N}\,dS = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t)\,dt + 0 + 0 = -\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \dots = \underline{\underline{-\pi}}$$

---

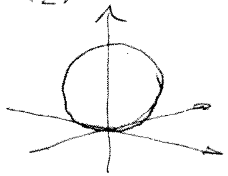
(5) $x^2+y^2+z^2 \le z \iff x^2+y^2+(z-\frac12)^2 \le (\frac12)^2$

Med sfäriska koordinater får vi området

$0\le\varphi\le2\pi$

$0\le\theta\le\pi/2$

$0\le r\le\cos\theta$



Det sista eftersom $r^2 \le z = r\cos\theta$

$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta}(r^3\sin\theta)\,dr\right)d\theta\right)d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{(\cos\theta)^5}{5}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}$$

---

(6) $n \le n+\frac1n \le 2n \Rightarrow (n+\frac1n)^{1/n}\to 1$ och $\underline{R=1}$.

För $|x|=1$ får vi termer som ej går mot 0.

Serien är alltså konvergent för $-1<x<1$

För $|x|<1$ är $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$ och deriverar vi:

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_1^\infty n x^{n-1}$ dvs $\sum_1^\infty nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

Integrerar vi så får vi istället

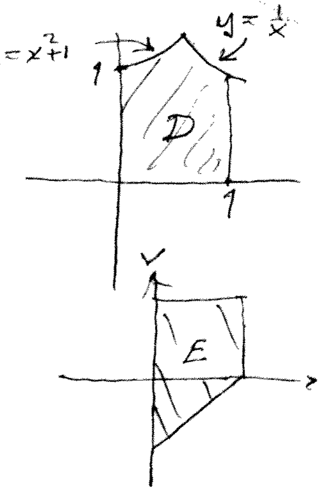
$-\ln(1-x) = \sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$

Svar: $\sum_1^\infty (n+\frac1n)x^n = \underline{\frac{x}{(1-x)^2} - \ln(1-x)}$ för $|x|<1$.

---

(7) Gör variabelsubstitution:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y - x^2 \end{cases}$$



Vi får nytt område E:

$$\begin{cases} u-1 \le v \le 1 \\ 0 \le u \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x\\ -2x & 1\end{vmatrix} = y+2x^2$$

Dvs $(y+2x^2)\,dx\,dy = du\,dv$ och

$$\iint_D (2x^2+y)\,dx\,dy = \iint_E du\,dv = \text{Arean av } E = \underline{\underline{\tfrac32}}$$

---

(8) $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$ och för $0<x<1$ så gäller $f_n(x)\to x$ punktvis. Vi skall visa att konvergensen är likformig genom att visa att $g_n(x) = x - f_n(x) = x(1-x)^n \to 0$ likformigt.

Derivera $g_n'(x) = (1-x)^n - xn(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$

så $g_n(x)$ har max för $x = \frac{1}{n+1}$.

$|g_n(x)| \le |g_n(\frac{1}{n+1})| = \frac{(1-\frac{1}{n+1})^n}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0$ då $n\to\infty$.

Detta visar att konvergensen är likformig