

Lösningar till MMG 300, II 09 08 20

④ Polära koordinater ger

$$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^2 r^4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) r dr \right) d\theta = \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta =$$

$$= \frac{63}{6} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/4} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$$

⑤ $\int_C (x^3 + y^3) dx + (x^2 + y^2) dy = \{ \text{Green's formula} \}$

$$= \iint_D (2x - 2y) dx dy = \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{2}$$

$= \iint_E u dv du = 0$, ty

symmetriskt i u-led och udda funktion

⑥ Byt till cylindriska koordinater, $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$

Vi får området: $\begin{cases} 0 \leq r \leq z \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_0^z \frac{\sin z}{z} r^2 dr \right) dz d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{\sin z}{z} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^z dz =$$

$$= \pi \int_0^1 2 \sin z dz = \pi [-2 \cos z]_0^1 + \pi \int_0^1 \cos z dz =$$

$$= \pi (-\cos 1 + [\sin z]_0^1) = \pi (\sin 1 - \cos 1)$$

⑦ Sätt $w = z^3$ och undersök först serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{\sqrt{n}} w^n. \text{ Eftersom } \left(\frac{2^n + 3^n}{\sqrt{n}} \right)^{1/n} =$$

$$= \frac{\left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)^{1/n}}{\sqrt{n^{1/n}}} \cdot 3 \rightarrow 3 \text{ då } n \rightarrow \infty \text{ så är } R = \frac{1}{3}$$

För $|w| = \frac{1}{3}$ sätter vi $w = \frac{1}{3} e^{i\theta}$ och får serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)}{\sqrt{n}} e^{in\theta}$

Eftersom $\left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right) / \sqrt{n} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} e^{ik\theta}$ är begränsad för $\theta \neq 0$ så ger Dirichlet's test att serien konvergerar för $\theta \neq 0$. $\theta = 0$ är termerna $\geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ så serien är då divergent. Serien är därför konvergent för $|w| \leq \frac{1}{3}$, $w \neq \frac{1}{3}$, dvs för $|z| \leq 3^{-1/3}$, $z \neq 3^{-1/3} e^{ik2\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$

⑧ $n \sin \frac{x}{n+x} = \frac{\sin \frac{x}{n+x}}{\frac{x}{n+x}} \cdot \frac{x}{\frac{x}{n} + 1} \rightarrow x$ då $n \rightarrow \infty$

Vi behöver visa att konvergensten är likformig på $[0, 1]$:

$$\left| n \sin \frac{x}{n+x} - x \right| = [\text{Maclaurin}] = \left| \frac{nx}{n+x} + n \left(\frac{x}{n+x} \right)^3 B_3 - x \right| =$$

$$= \left| -\frac{x^2}{n+x} + n \left(\frac{x}{n+x} \right)^3 B_3 \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot B \rightarrow 0$$

Detta visar att konvergensten är likformig och därmed gäller:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \sin \frac{x}{n+x} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{x}{n+x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$