Lösningar till MMG 300, II
100116

④ Cylindriska koordinater: $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, "$z=z$".

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{r^2}^1 zr\,dz\right)r\,dr\right)d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_{r^2}^1 dr = \pi\int_0^1(r^2-r^6)\,dr =$$

$$= \pi\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^7}{7}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{4\pi}{21}}}$$

---

⑤ Det visar sig att fältet är konservativt och alltså har en potentiel $F(x,y,z)$:

$F(x,y,z) = \int yz+\frac{1}{1+x^2}\,dx = xyz+\arctan x + h(y,z)$

$xz = F'_y = xz + h'_y(y,z)$ ger $h'_y=0$, $h(y,z)=g(z)$

$xy+2z = F'_z = xy+g'(z)$ ger $g'(z)=2z$, $g(z)=z^2$.

Vi har nu visat att $F = xyz+\arctan x+z^2$ är en potentiel. Därmed är kurvintegralen =

$= F(\cos\pi,\sin\pi,\pi) - F(\cos 0,\sin 0,0) =$

$= F(-1,0,\pi)-F(1,0,0) = -\frac{\pi}{4}+\pi^2-\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\pi^2-\frac{\pi}{2}}}$

---

⑥ Konvergensradie? $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{n}{(n-1)!}+1}{\frac{n+1}{n!}+1} \to 1$ då $n\to\infty$

Dvs $R=1$. För $|x|=1$ får vi

$\sum_1^\infty\left(\frac{n}{(n-1)!}+1\right)$ som är divergent ty termerna $\not\to 0$.

Serien konvergerar således för $|x|<1$

Summan $= \sum_1^\infty \frac{n}{(n-1)!}x^{2n} + \sum_1^\infty x^{2n}$

2:a serien är geometrisk med kvot x^2 dvs

$\sum_1^\infty x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}$.

För att beräkna den 1:a seriens summa utgår vi från $e^y = \sum_0^\infty \frac{y^n}{n!} = \sum_1^\infty \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$ och alltså $ye^y = \sum_1^\infty \frac{y^n}{(n-1)!}$. Deriverar vi termvis får vi $(y+1)e^y = \sum_1^\infty \frac{ny^{n-1}}{(n-1)!}$ och därmed $(y^2+y)e^x = \sum_1^\infty\frac{ny^n}{(n-1)!}$

Slutligen sätter vi $y=x^2$ och får $\sum_1^\infty\frac{nx^{2n}}{(n-1)!} = (x^4+x^2)e^{x^2}$

Svar: $\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{n}{(n-1)!}+1\right)x^{2n} = (x^4+x^2)e^{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}$ för $|x|<1$

---

⑦ Eftersom fältet = 0 i xy-planet så kan vi sluta ytan med enhetsskivan i xy-planet och använda Gauss sats: Flödet =

$= \iint_S xy^2\,dydz + yz^2\,dzdx = \iiint_D (y^2+z^2)\,dxdydz =$

= Sfäriska koordinater =

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a (r^2 - r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)\, r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi =$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a\left(\int_0^{\pi/2} 2\pi\sin\theta - \left(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi}_{\pi}\right)\sin^3\theta\right)d\theta = \frac{\pi a^5}{5}\int_0^{\pi/2}(2-\sin^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{\pi a^5}{5}\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi a^5}{5}\left[-\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{4\pi a^5}{15}}}$$

---

⑧ $f'_n(x) = -n\sin\frac{x}{n} = -x\,\frac{\sin(x/n)}{(x/n)} \to -x$ då $n\to\infty$.

Vi undersöker om konvergensen är likformig:

$g_n(x) = f'_n(x)-(-x) = x - n\sin\frac{x}{n}$. $g'_n(x) = 1-\sin\frac{x}{n} \geq 0$. Dvs $g_n(x)$ växer och vi ser att $|g_n(x)| \leq 1 - n\sin\frac{1}{n} \to 0$ då $n\to$

Dvs $g_n(x)\to 0$ likformigt och därmed $f'_n(x)\to -x$ likformi

Eftersom $f_n(x)$ konvergerar (mot 0) för $x=0$ så gäller $f_n \to$ likformigt mot f med $f'(x)=-x$. Eftersom $f(0)=$ får vi att $f_n(x)\to -\frac{x^2}{2}$ likformigt.