Lösningar till MMG 300, del 2
2010-06-01

(1) Sats 9.4 i P-B.

(2) Sats 3.4 i GLO.

(3) Sats 6.4 i P-B.

---

(4) Parameterisering: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ $\quad dx = -\sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$ $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\pi/2} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t]\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin t(\cos^2 t - \cos t) - \sin^2 t)\, dt =$$

$$= \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{6} - \frac{\pi}{4}}}$$

---

(5) Konvergensradien: $\frac{(n+1)^2 + n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2+n} \to \frac{1}{2}$. $\underline{R = 2}$.

för $R = 2$ är $|a_n x^n| = n^2 + n \to \infty$. Serien divergent

Summan? För $|x| < 2$ är $\sum_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$

Derivering ger $\sum_1^\infty \frac{n x^{n-1}}{2^n} = \frac{2}{(2-x)^2}$

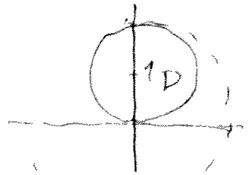
Derivera igen $\sum_1^\infty \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2^n} = (!) = \sum_1^\infty \frac{(n+1)n x^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{4}{(2-x)^3}$

Alltså $\sum_1^\infty (n+n^2)x^n = 2x \frac{4}{(2-x)^3} = \underline{\underline{\frac{8x}{2-x^3}}}$, $|x| < 2$.

---

(6) Ytan kan skrivas $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, för $(x,y) \in D$
där D bestäms av $x^2 + y^2 < 2y$, dvs $x^2 + (y-1)^2 < 1$

Parameterisering: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \sin t \\ z = \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$, $\quad 0 \le t \le \pi$, $\quad 0 \le r \le 2\sin t$



$$\mathbf{r}'_r \times \mathbf{r}'_t = \left(\cos t, \sin t, -\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\right) \times (-r\sin t, r\cos t, 0) = \left(\frac{r^2 \cos t}{\sqrt{4-r^2}}, \frac{r^2 \sin t}{\sqrt{4-r^2}}, r\right)$$

och $|\mathbf{r}'_r \times \mathbf{r}'_t| = r\sqrt{\frac{r^2}{4-r^2} + 1} = \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}$

$$\text{Arean} = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\sin t} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\right) dr\, dt = 2\int_0^{\pi} \left[-\sqrt{4-r^2}\right]_0^{2\sin t} dt = 2\int_0^{\pi} 2 - 2|\cos t|\, dt$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} 1 - \cos t = 4\pi - 8[\sin t]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{4\pi - 8}}$$

---

(7) Om $u_n = \arctan(x+n) - \arctan(1+n)$
Så är $|u_n'| = \frac{1}{1 + (x+n)^2} \le \frac{1}{n^2}$ så enl. Weierstrass
är $\sum_1^\infty u_n'$ likformigt konvergent. Vidare så
är $\sum_1^\infty u_n$ konvergent för $x = 1$. Därmed
konvergerar $\sum_1^\infty u_n$ likformigt mot en
funktion med kontinuerlig derivata

---

(8) $\operatorname{Div} \mathbf{F} = 1 - (3x^2 + y^2 + z^2)$. Gauss' sats ger

$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_D (1 - (3x^2 + y^2 + z^2))\, dx\,dy\,dz$ som är
maximal om $D = \{(x,y,z) : 1 - (3x^2 + y^2 + z^2) \ge 0\}$
Dvs D är ellipsoiden $3x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.
Vi använder elliptiska koordinater
$(x,y,z) = \left(\frac{r}{\sqrt{3}} \sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right)$, $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Då är $J(r,\theta,\varphi) = \frac{r^2}{\sqrt{3}} \sin\theta$ och

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 (1 - r^2)\frac{r^2}{\sqrt{3}}\sin\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}[-\cos\theta]_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1\right.\right.$$

$$= \underline{\underline{\frac{8\pi}{15\sqrt{3}}}}$$