Lösningar till MMG 300, II, 100823

④ Variabelbytet $\begin{cases} u = x-2y \\ v = 2x+3y \end{cases}$ ger $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{7}$ och

integralen $\frac{1}{7}\int_1^8 \left(\int_{-3}^4 u\,du \right) v^{1/3}\,dv = \frac{1}{7}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-3}^4 \left[\frac{3}{4}v^{4/3}\right]_1^8 = \underline{\underline{\frac{45}{8}}}$

---

⑤ Konvergensradie: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\,\frac{2^{-n-1}+1}{2^{-n}+1}\cdot\frac{1+n^2}{1+(n+1)^2} \to 2$

$R = \frac{1}{2}$ $\quad |z| = \frac{1}{2}$ ger

$|a_n z^n| = \frac{2^{-n}+1}{1+n^2} = \frac{1}{n^2}\,\overbrace{\frac{2^{-n}+1}{1/n^2+1}}^{\to 1}$. $\sum \frac{1}{n^2}$ är konvergent

Alltså är serien absolutkonvergent för $|z| = \frac{1}{2}$

Svar serien är konvergent för $\underline{|z| \le \frac{1}{2}}$

---

⑥ Parameterisering av ytan: $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = \frac{b}{a}r \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \end{matrix}\right\} = D$

$|\mathbf{r}_r' \times \mathbf{r}_t'| = |(\cos t, \sin t, \frac{b}{a}) \times$

$\times (-r\sin t, r\cos t, 0)| = |(-\frac{b}{a}r\cos t, -\frac{b}{a}r\sin t, r)| = r\sqrt{1+b^2/a^2}$

$I = \iint_D r\cdot r\sqrt{1+b^2/a^2}\,dr\,dt = 2\pi\sqrt{1+b^2/a^2}\,\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \underline{\frac{2\pi a^2}{3}\sqrt{a^2+b^2}}$

---

⑦ Greens formel ger $\int_\gamma = -\int_{-\gamma} = -\iint_D$ divergensen $=$

$= \iint_D (6x - 3x^2 - 3y^2)\,dx\,dy = 3\iint_D (1-(x-1)^2-y^2)\,dx\,dy$ som

är maximal då $D = \{(x,y) : 1-(x-1)^2-y^2 \ge 0\}$ dvs

då $(x-1)^2+y^2 \le 1$. Alltså, γ är $\underline{\text{cirkeln } (x-1)^2+y^2 = 1, \text{ medurs.}}$

---

⑧ Med $f_n(x) = \frac{1}{1+x+\dots+x^n} = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}$

och $f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < \infty \end{cases}$ gäller att

$f_n(x) \searrow f(x)$ punktvis i $[0,\infty[$.

Vi visar att konvergensen är likformig genom att visa att $0 < f_n(x) - f(x) \le \frac{1}{n}$ i $[0,\infty[$:

$\underline{x \ge 1} \Rightarrow f_n(x) - f(x) = f_n(x) \le \frac{1}{1+1+\dots+1} = \frac{1}{n}$

$\underline{x < 1} \Rightarrow f_n(x) - f(x) = \frac{1}{1+x+\dots+x^n} - (1-x) = \frac{1-(1-x^{n+1})}{1+x+\dots+x^n} =$

$= \frac{x^{n+1}}{1+x+\dots+x^n} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}+\dots+\frac{1}{x^n}} \le \frac{1}{n}$.

Nu är $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \underline{\underline{1/2}}$