Lösningar till MMG 300 del 2
11 01 08

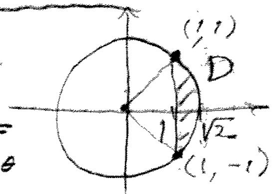
① Sats 6.2, sid 235 i P-B.

② Sats 2.13, sid 76 i GLO.

③ Sats 3.5, sid 95 i GLO

---

④ Polära koordinater. $x=1 \Leftrightarrow r=\frac{1}{\cos\theta}$.



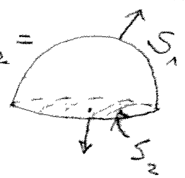
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} r\cos\theta\, r\,dr\right)d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\left[r^3\right]_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}}d\theta=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(2\sqrt{2}\cos\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\frac{1}{3}\left[2\sqrt{2}\sin\theta-\tan\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

---

⑤ Med Gauss' sats får vi

$S=S_1\cup S_2 = \partial D$



$$\iint_S \nabla\varphi\, dS=\iiint_D \nabla\cdot\nabla\varphi\, dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_D \nabla\cdot(2x+y,\,x+2y,\,1)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_D 4\,dx\,dy\,dz=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

$$\iint_{S_1}\nabla\varphi\, dS=\frac{8\pi}{3}-\iint_{S_2}\nabla\varphi\, dS=\frac{8\pi}{3}+\iint_{x^2+y^2\le 1}(2x+y,\,x+2y,\,1)(0,0,1)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{8\pi}{3}+\iint_{x^2+y^2\le 1}1\,dx\,dy=\frac{8\pi}{3}+\pi=\underline{\underline{\frac{11\pi}{3}}}$$

---

⑥ För $|x|<\frac{1}{2}$ är $\left|\frac{n}{n+x}2^{n(x-1)}\right|\le 2\cdot 2^{-n/2}$

och $\sum 2\cdot 2^{-n/2}=2\sum\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ är konvergent.

Enligt Weierstrass är därför serien likformigt konvergent och därmed

$$\lim_{x\to 0}\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{n+x}2^{n(x-1)}=\sum_{1}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{n}{n+x}2^{n(x-1)}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}2^{-n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1=\underline{\underline{1}}$$

---

⑦ $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}\to 1$ då $n\to\infty$. Därmed är $R=1$ och då termerna ej $\to 0$ för $|x|=1$ är konvergensintervallet $\underline{\underline{]-1,1[}}$

Sätt $f(x)=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$, $|x|<1$.

Derivera: $-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$

Multiplcera med $-x^3$ och integrera igen

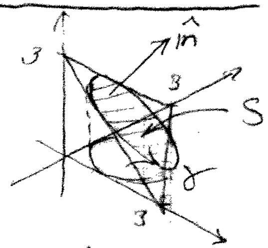
$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+2)x^{n+1}=\frac{3x^2(1+x)^2-2(1+x)\cdot x^3}{(1+x)^4}=\frac{(3+x)x^2}{(1+x)^3}$$

Dividera båda led med x^2 byt n mot $n+1$:

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)x^n=\underline{\underline{\frac{3+x}{(1+x)^3}}}$$

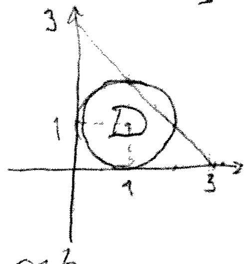
---

⑧ Kurvan ligger i planet $x+y+z=3$ och omsluter ytan S i planet enligt figur.



Vi använder Stokes' sats

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S(\operatorname{rot}\mathbf{F})\cdot\hat{n}\,dS$$



$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=(\partial_x,\,\partial_y,\,\partial_z)\times(ye^x,\,x^2+e^x,\,z^2e^z)=(0,0,2x)$$

och med parameteriseringen $(x,\,y,\,3-x-y)$ är $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=(1,1,1)$ och

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_D(0,0,2x)\cdot(1,1,1)\,dx\,dy=\iint_D 2x\,dx\,dy=$$

$$\{(x,y)=(1+r\cos\theta,\,1+r\sin\theta)\}=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(2+2r\cos\theta)\,r\,dr\right)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[r^2+\frac{2r^3}{3}\cos\theta\right]_{r=0}^{1}d\theta=\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{2}{3}\cos\theta\right)d\theta=\underline{\underline{2\pi}}.$$