MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2012-05-31 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Hossein Raufi.
tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Antag att $(f_n)_1^\infty$ är en funktionsföljd definierad i en mängd M (i R^N eller C). (3p)
   Visa att om $f_n \to f$ likformigt på M och f_n kontinuerlig för varje n, så är också f kontinuerlig.

2. Antag att $\boldsymbol{F}$ är ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen för alla kurvor $\gamma \in \Omega$ så har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω. (3p)

3. Antag att $f(x,y)$ är kontinuerlig i $\{(x,y) : \alpha(x) \le y \le \beta(x), a \le x \le b\}$. (4p)
   Visa att $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$ är kontinuerlig för $a \le x \le b$ om
   (a) $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$ för $a \le x \le b$.
   (b) $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga för $a \le x \le b$.

4. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2y}\, dxdy$ där D är området som ges av olikheterna $x^2/2 \le y \le x^2$ och $y \ge 1$. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C (x+y^3)\ dx - (y+x^3)\ dy$, där C är randen till cirkelsektorn som bestäms av olikheterna $0 \le x^2+y^2 \le 1$ och $-y \le x \le y$, genomlöpt moturs.

6. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1+\sqrt{n}\ 2^n}{n+n^2} z^{2n}$? (3p)

7. Beräkna trippelintegralen $\displaystyle\iiint_D (x+y^2+z^3)\ dxdydz$,
   där D bestäms av olikheterna $x^2+y^2 \le 1+z$ och $0 \le z \le 1$.

8. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^3+n^2x}{(x+n)^2}\, dx$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$