MATEMATIK | **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**

Göteborgs Universitet | Datum: 2013-01-15 kl. 08.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Christoffer Stanadar.

tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Visa att om funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x,y); a \le x \le b, c \le y \le d\}$ så är f integrerbar över Δ. (3p)

2. Formulera och bevisa Dirichlets test för konvergens av en serie av typen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. (3p)

   (Du behöver inte bevisa Abels summationsformel.)

3. (a) Definiera vad som menas med att en funktionsföljd konvergerar likformigt på ett intervall $[a,b]$. (4p)

   (b) Visa att om $f_n \to f$ likformigt på $[a,b]$ och f_n är kontinuerlig för varje n så är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
   Att gränsfuktionen f är kontinuerlig får anses bekant.

4. Beräkna dubbelintegralen (3p)
$$\iint_D (x-y)\sqrt{3x+y}\;dxdy$$
   där D är parallellogrammen med hörn i $(0,1),\ (1,-2),\ (3,0)$ och $(2,3)$.

5. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{\sqrt{1+n^3}} z^n$? (3p)

6. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma 6xy\;dx + (x^3+3xy^2)\;dy$$
   då γ är cirkeln med medelpunkt $(1,0)$ och radien 1, genomlöpt ett varv medurs.

7. Beräkna flödet av fältet $(3xz^2, y^3, 1)$ upp genom halvsfären $x^2+y^2+z^2=1,\ z>0$. (3p)

8. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ne^{x/(x+n)} - n\;dx$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1} B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1} B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1} B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1} B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1} B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$