MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen 2013-08-23, 8:30 - 12:30

MMG300 Flervariabelanalys, del 1

Examinator: Ulla Dinger, Matematiska vetenskaper, tel 772 3559
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04
Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa. Språklexikon är tillåtet.

Betygsgränser: 12 poäng krävs för betyget G och 18 poäng krävs för betyget VG.
Lösningsförslag läggs ut på kursens hemsida.
Resultat meddelas via Ladok, granskning sker på studieexpeditionen.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är likformigt kontinuerlig på en mängd D.

(b) Visa att en funktion f som är kontinuerlig på en kompakt mängd D också är likformigt kontinuerlig på D.

(c) Visa att funktionen $f(x) = x \ln x$ är likformigt kontinuerlig på intervallet $]0,1]$.

(d) Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig, men inte likformigt kontinuerlig, på mängden $]0,1]$. (5p)

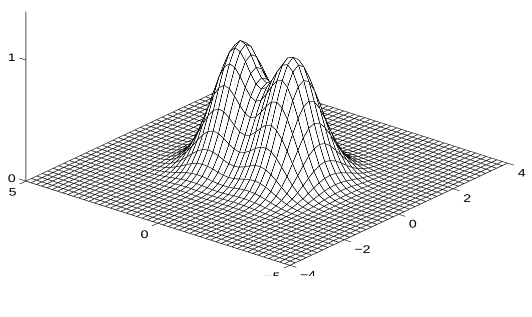
2. Låt f och g vara av klass $\mathcal{C}^1$. Antag att (a,b) är en inre punkt i D_f och i D_g som löser problemet att maximera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y) = 0$.
Visa att då är grad$f(a,b)$ och grad$g(a,b)$ parallella. (3p)

3. (a) Rita några nivåkurvor till funktionerna

$$f(x,y) = y - \cos x \quad \text{och} \quad g(x,y) = \sqrt{x+y}\ .$$

Rita tillräckligt många nivåkurvor för respektive funktion, samt ange nivåerna, så att figurerna på ett tydligt sätt illustrerar funktionerna.

(b) Skissa nivåkurvor till funktionen med nedanstående graf. (3p)



Vänd!

4. Lös den partiella differentialekvationen

$$\frac{1}{x}f'_x - \frac{1}{y}f'_y = 4x^2y^2\ , \quad x > 0,\ y > 0$$

t.ex. genom att införa variablerna $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$. (4p)

5. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 3x^2y + 2y^2x - x\,.$$

Avgör sedan i vilka av dessa punkter som f har lokalt maximum respektive lokalt minimum. (3p)

6. Finns det kontinuerliga funktioner f sådana att $f(D) = S$ i fallen nedan? Ge exempel eller motbevis.

(a) $D = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}$, $S = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
(b) $D = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $S = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1, x < 0\}$
(c) $D = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1, x < 0\}$, $S = \{(x,y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (4p)

7. Undersök om funktionen f är differentierbar i $\mathbb{R}^2$ om

$$f(0,0) = 0 \text{ och } f(x,y) = \frac{2x^4 + 3y^4 + x^3}{x^2 + y^2} \text{ om } (x,y) \neq (0,0).$$ (3p)

Lycka till!
Ulla