MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**

Göteborgs Universitet Datum: 2013-06-04 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng.

tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med ett potentialfält i ett öppet område $\Omega \in \mathbf{R^2}$. (2p)

   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält med potential av klass C^2 i Ω så är $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i Ω.

2. Visa att för varje komplex potensserie $\sum\limits_0^\infty c_n z^n$ så gäller exakt ett av följande tre. (4p)

   (a) Serien är konvergent för alla z,

   (b) serien är konvergent endast för $z = 0$ eller

   (c) det finns ett tal $R > 0$ så att serien är absolutkonvergent för $|z| < R$ och divergent för $|z| > R$.

3. Formulera och bevisa Greens formel. (4p)

4. Beräkna trippelintegralen (3p)
$$\iiint_D xyz\ dxdydz$$
   där D är området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$, $y > 0$ och $0 < z < 1$, .

5. Beräkna kurvintegralen (3p)
$$\int_\gamma (y + \frac{2}{y})\ dx + x\ dy$$
   då γ går från punkten $(0, 1)$ till punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, närmsta väg längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

6. Beräkna ytintegralen (3p)
$$\iint_Y xy\ dS$$
   där Y är ytan $2z = x^2 - y^2$ för $x^2 + y^2 < 1$ och $0 < y < x$.

7. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\sum\limits_{n=2}^\infty \dfrac{(-1)^n(2^n + 3^n)}{\ln n} z^{2n}$? (3p)

8. Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 n \ln(1 + \dfrac{x}{n})\ dx$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\,, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\,, \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\,, \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\,, \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$