MATEMATIK **Hjälpmedel: medföljande formelblad**

Göteborgs Universitet Datum: 2012-01-10 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt:Jakab Sznajdman.

tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Formulera och bevisa Greens formel. (3p)

2. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)
   (Triangelolikheten för absolutkonvergenta serier får anses bekant.)

3. Antag att (f_n) är en föjd C^1-funktioner på ett intervall $I =]a, b[$ som konvergerar i minst en punkt i I. Visa att om då (f_n') konvergerar likformigt på I så konvergerar (f_n) likformigt på I mot en C^1-funktion f med $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ (4p)

4. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D x^4 - y^4 dxdy$ där D är området som ges av olikheterna $0 \leq y \leq x$ och $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ (3p)

5. Beräkna flödet ut ur cylinderområdet $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ av vektorfältet (3p)
$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^3, y^2 z, x^2 z)$$

6. För vilka *reella* x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty}(n + \frac{1}{n})x^n$? Bestäm också summan av serien uttryckt i elementära funktiner. (3p)

7. Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2 - y^2$ som bestäms av olikheterna $z > 0$ och $x^2 + y^2 < 1$. (3p)

8. Visa att $\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$ konvergerar likformigt på hela $\mathbf{R}$ om $\alpha > 1/2$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\,, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\,, \quad \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$