MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**

Göteborgs Universitet Datum: 2012-08-27 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt: .

tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiiera vad som menas med att **F** är ett potentialfält i ett öppet område Ω i R^2. (4p)

   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ har en potential U i Ω så är $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{b}) - U(\boldsymbol{a})$ om γ är en kurva i Ω med begynnelsepunkt $\boldsymbol{a}$ och slutpunkt $\boldsymbol{b}$.

2. Antag att f är en integrerbar funktion på rektangeln D: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. (3p)
   Visa att $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$, givet att enkelintegralerna existerar.

3. Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (3p)

4. En parttikel påverkas av kraften $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z, x, yz)$. Beräkna det arbete som uträttas då partikeln flyttas från punkten (1,0,0) till punkten (1,0,1) längs spiralkurvan $(x,y,z) = (cost, sint, t/(2\pi))$. (3p)

5. Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2 + xy - y^2$ där $x^2 + y^2 \le 1$. (3p)

6. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (zx, -yz, x^2)$ genom den koniska ytan $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \ge 0$. Normalriktning med positiv z-koordinat. (3p)

7. Bestäm konvergensradien till potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{2^n} z^n$ och bestäm sedan, med hjälp av den potensserien, summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{2^n}$. (3p)

8. Visa att $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n)^2}$ är kontinuerlig för $x \ge 0$ och beräkna $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$