MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**

Göteborgs Universitet Datum: 2014-01-14 kl. 08.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Christoffer Standar.

tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)
   (Triangelolikheten för absolutkonvergenta serier får anses bekant.)

2. Antag att $f(x,y)$ är kontinuerlig i $\{(x,y) : \alpha(x) \le y \le \beta(x), a \le x \le b\}$. (4p)
   Visa att $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$ är kontinuerlig för $a \le x \le b$ om
   (a) $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$ för $a \le x \le b$.
   (b) $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga för $a \le x \le b$.

3. Antag att $(f_n)_1^\infty$ är en funktionsföljd definierad i en mängd M (i R^N eller C). (3p)
   Visa att om $f_n \to f$ likformigt på M och f_n kontinuerlig för varje n, så är också f kontinuerlig.

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C (x+y)dx + xydy$ där C är bågen från (1,0) till (0,1) längs enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ (närmaste väg). (3p)

5. Beräkna dubbelintegralen (3p)
   $$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy$$
   där D är triangelytan med hörn i punkterna (0,0), (1,1) och (0,2).

6. Beräkna flödet av fältet $(0, x^2y, y^2z)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$. (3p)

7. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{n^{1/3}} z^{4n}$? (3p)

8. Visa att funktionsserien $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x/k}e^{-k/x}$, $\quad x > 0$, konvergerar likformigt på varje intervall $]0, R]$ där $R > 0$.

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1} B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1} B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1} B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1} B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1} B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$