MATEMATIK | **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet | Datum: 2014-06-03 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Matteo Molteni.
tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiiera vad som menas med att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält i ett öppet område Ω i R^2. (4p)
   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ har en potential U i Ω så är $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{b}) - U(\boldsymbol{a})$ om γ är en kurva i Ω med begynnelsepunkt $\boldsymbol{a}$ och slutpunkt $\boldsymbol{b}$.

2. Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (3p)

3. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x, y); a \le x \le b, c \le y \le d\}$ så är f integrerbar över Δ. (3p)

4. Beräkna dubbelintegralen (3p)
$$\iint_D x \; dxdy$$
där D är parallellogrammen med hörn i $(-1, 1)$, $(2, -2)$, $(3, 0)$ och $(0, 3)$.

5. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^n}{\sqrt{1+n^2}} z^{2n}$? (3p)

6. Beräkna $\displaystyle\iint_S y\, dy\, dz + x\, dz\, dx + z\, dx\, dy$ där S är ytan som ges av parameterframställningen $(x, y, z) = (u \cos v, u \sin v, v)$, $1 < u < 2$, $0 < v < 2\pi$, orienterad så att normalvektorn har positiv z-koordinat. (3p)

7. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y^2 x + \sin z, yx^2 + \cos z, z + \sin x + \cos y)$ ut genom begränsningsytan till det koniska området som ges av olikheena $0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. (3p)

8. Visa att $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n}{1+(x+n)^4}$ är kontinuerlig för $x \ge 0$ och beräkna $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$