MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2015-04-14 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: Gustav Kettil 0703-088304.

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ så är f integrerbar över Δ. (3p)

2. Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (3p)

3. (a) Definiera vad som menas med att en funktionsföljd konvergerar likformigt på ett intervall $[a, b]$. (4p)

   (b) Visa att om $f_n \to f$ likformigt på $[a, b]$ och f_n är kontinuerlig för varje n så är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.
   Att gränsfuktionen f är kontinuerlig får anses bekant.

4. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xe^{-2y} dxdy$ där D är området där $x^2 \leq y \leq x$. (3p)

5. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(1+n)e^n} z^{2n}$? (3p)

6. Beräkna arean av den del av ytan $z = xy$ där $x^2 + y^2 \leq 4$ och $0 \leq x \leq y$. (3p)

7. Beräkna kurvintegralen $\int_C -\frac{x}{(x^2 - y^2)^2}\, dx + \frac{y}{(x^2 - y^2)^2}\, dy$, (3p)

   där C är parabeln $x = 1 + y^2$ från $(1, 0$ till $(2, 1)$.

8. Visa att om a>0 så är $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^3 + n)^{1+a}}$ kontinuerlig för $x \geq 0$. (3p)

   Beräkna sedan $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\,, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\,, \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\,, \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\,, \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$