MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2016-04-05 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: Dawan Mustafa , 0739900967.

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Antag att $(f_n)_1^\infty$ är en funktionsföljd definierad i en mängd M (i R^N eller C). Visa att om $f_n \to f$ likformigt på M och f_n kontinuerlig för varje n, så är också f kontinuerlig. (3p)

2. Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig i $\{(x, y) : \alpha(x) \le y \le \beta(x), a \le x \le b\}$. (4p)
   Visa att $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)dy$ är kontinuerlig för $a \le x \le b$ om
   (a) $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$ för $a \le x \le b$.
   (b) $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga för $a \le x \le b$.

3. Bevisa Abels partiella summationsformel: (3p)
   $$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_n - a_{m+1}B_m + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k, \text{ där } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C (3x^2y + \cos x)dx + (x^3 + e^y)dy$, där C är kurvan $x = 2^y$ från $(1, 0)$ till $((2, 1)$. (3p)

5. För vilka rella x konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n n^2 x^n$? Bestäm också seriens summa uttryckt i elementära funktiner. (4p)

6. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2}\, dxdy$ där D är det område som ges av olikheterna $x > 0$, $y > 0$ och $x^2 + y^2 > 1$. (2p)

7. Beräkna ytintegralen $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, där $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (2xz, x + z^2, z^2 + y$ och S är begränsningsytan till tetraedern med hörn i $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 2)$ med normalriktning utåt. (3p)

8. Bestäm en talföljd $(a_n)_{n=1}^\infty$ så att funtionsföljden $f_n(x) = \ln(1 + nx) - a_n$ är likformigt konvergent på varje intervall, $[r, \infty)$ där $r > 0$. Bestäm också $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$