MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2015-06-03 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: Mikael Björklund 072 858 67 87.

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)
   (Triangelolikheten för absolutkonvergenta serier får anses bekant.)

2. Antag att $\boldsymbol{F}$ är ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen för alla kurvor $\gamma \in \Omega$ så har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω. (3p)

3. Visa att för en komplex potensserie, $\sum_0^\infty c_n z^n$, så gäller ett av följande alternativ. (4p)
   (a) Serien är konvergent för alla z,
   (b) serien är konvergent endast för $z = 0$ eller
   (c) det finns ett tal $R > 0$ så att serien är absolutkonvergent för $|z| < R$ och divergent för $|z| > R$.

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C (2x + x^2y)e^{xy}\ dx + (x^3e^{xy} + 1)\ dy$, (3p)

   där C är ellipsen $36x^2 + 4y^2 = 9$ från $(0, 3)$ till $(1/2, 0)$. Ledning: Bestäm en potential.

5. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D y\ dxdy$ där D är triangelytan med hörn i punkterna (0,0), (1,2) och (2,1). (3p)

6. För vilka rella x konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-2)^n}{n}x^n$? Bestäm också seriens summa uttryckt i elementära funktiner. (3p)

7. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y + xz, x - yz, x + y)$ upp genom ytan $x + z + x^2 + y^2 = 0.\ z \geq 0$ (3p)

8. Visa att följden $f_n(x) = \dfrac{x^4 + n^2x^2}{(x + n)^2}$ är likformigt konvergent på intervallet [0,1] samt beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$