MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2015-08-25 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt:Tim Cardilin 0703088304 .

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med ett potentialfält i ett öppet område $\Omega \in \mathbf{R^2}$. (3p)

   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält med potential av klass C^2 i Ω så är $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i Ω.

2. Formulera och bevisa Greens formel. (3p)

3. Antag att (f_n) är en föjd C^1-funktioner på ett intervall $I =]a, b[$ som konvergerar i minst en punkt i I. Visa att om då (f'_n) konvergerar likformigt på I så konvergerar (f_n) likformigt på I mot en C^1-funktion f med $f' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n$ (4p)

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C zdx + ydy$+xdz, där C är skärningskurvan mellan ytorna $y = x^2$ och $z = x^3$ från punkten $(0, 0, 0)$ till punkten $(2, 4, 8)$. (3p)

5. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz, yz, z^2)$ ut genom begränsningsytan till området som ges av olikheena $0 \le y \le x \le 1$ och $0 \le z \le x + y$. (3p)

6. Beräkna $\displaystyle\iiint_D x^2 + y^2\, dx\, dy\, dz$ där D är det område där $x^2 + y^2 + z^2 < 4$, $3z^2 \ge x^2 + y^2$, $z \ge 0$. (3p)

7. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\ln n} z^{3n}$? (3p)

8. Visa att om $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x^n)}{n}\, 2^{-n}$ så är f kontinuerligt deriverbar i $]-2, 2[$ samt beräkna $f'(1)$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\,, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\,, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\,, \text{ där } \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$