MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2016-08-23 kl. 08.30.00–12.30
Tentamen Telefonvakt: Anders Martinsson, ankn. 5325.

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Antag att $f(x,y)$ är kontinuerlig i $\{(x,y) : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b\}$. (4p)
   Visa att $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$ är kontinuerlig för $a \leq x \leq b$ om
   (a) $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 1$ för $a \leq x \leq b$.
   (b) $\alpha(x)$ och $\beta(x)$ är kontinuerliga för $a \leq x \leq b$.

2. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)
   (Triangelolikheten för absolutkonvergenta serier får anses bekant.)

3. Formulera och bevisa rotkriteriet för serier. (3p)

4. För vilka reella x konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)^{1/3}}\, x^n$. (3p)

5. Givet fältet $\boldsymbol{F} = (P,Q) = (y^2\cos xy - y^2, \sin xy + xy\cos xy)$.
   (a) Motivera att kurvintegralen $\displaystyle\int_{C_1} Pdx + Qdy = 0$, (1p)
   där C_1 går från punkten $(-1,0)$ till punkten $(1,0)$ längs x–axeln.
   (b) Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_{C_2} Pdx + Qdy$, (2p)
   där C_2 går från punkten $(1,0)$ till punkten $(-1,0)$ längs enhetscirkeln för $y \geq 0$.

6. Beräkna ytintegralen $\displaystyle\iint_S z\ dS$ där S är ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ för $0 \leq z \leq 1$. (3p)

7. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C (e^z \sin y - y)dx + (xe^z\cos y - z)dy + (xe^z \sin y - x)dz$, (3p)
   där C är den slutna triangelkurvan men hörn i $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$ och orienterad så att hörnen genomlöps i denna ordning.

8. Givet funktionsföljden $f_n(x) = (\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k)^{-1}$. Visa att $f_n(x)$ konvergerar likformigt för $x \in [0,\infty)$ samt bestäm gränsfunktionen. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$