MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2017-01-03 kl. 14.00–18.00
Tentamen Telefonvakt: Anna Persson, ankn. 5325.

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med att en funktionsföljd konvergerar likformigt på ett intervall $[a, b]$. (4p)

   (b) Visa att om $f_n \to f$ likformigt på $[a, b]$ och f_n är kontinuerlig för varje n så är $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
   Att gränsfuktionen f är kontinuerlig får anses bekant.

2. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ så är f integrerbar över Δ. (3p)

3. Antag att $\boldsymbol{F}$ är ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen för alla kurvor $\gamma \in \Omega$ så har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω. (3p)

4. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D x\; dxdy$ (3p)
   där D är parallellogrammen med hörn i $(-1, -1)$, $(2, 2)$, $(1, 4)$ och $(-2, 1)$.

5. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + n)e^n}{\sqrt{1 + n^2}} z^{2n}$? (3p)

6. eräkna kurvintegralen
   $$\int_\gamma 6xy\; dx + (x^3 + 3xy^2)\; dy$$
   då γ är cirkeln med medelpunkt $(1, 0)$ och radien 1, genomlöpt ett varv medurs.

7. Beräkna flödet av fältet $(3xz^2, y^3, 1)$ upp genom halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$. (3p)

8. Låt $f_n(x) = n^3(n^2 \sin \frac{x + n}{n^2} - x \cos \frac{x + n}{n^2})$. Bestäm en talföljd $(a_n)_1^\infty$ så att $f_n - a_n$ blir likformigt konvergent på varje ändligt intervall. Bestäm sedan $\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - a_n)$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$