MATEMATIK | **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet | Datum: 2017-05-30 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Sven Järner, ankn. 3561.

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiiera vad som menas med att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält i ett öppet område Ω i R^2. (4p)

   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ har en potential U i Ω så är $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{b}) - U(\boldsymbol{a})$ om γ är en kurva i Ω med begynnelsepunkt $\boldsymbol{a}$ och slutpunkt $\boldsymbol{b}$.

2. Formulera och bevisa Greens formel. (3p)

3. Antag att $(f_n)_1^\infty$ är en funktionsföljd definierad i på en mängd M (i R^N eller C). (3p)

   (a) Definniera vad som menas med att $f_n \to f$ likformigt på M.

   (b) Visa att om $f_n \to f$ likformigt på M och f_n kontinuerlig för varje n, så är också f kontinuerlig.

4. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+n^2} z^n$? (3p)

5. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D (x-2y)(2x+3y)^{1/3} dxdy$ där D är parallellogrammen med hörn i $(2,-1)$, $(4,0)$, $(1,2)$ och $(-1,1)$. (3p)

6. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$ där C är kurvan $4x^2 + y^2 = 4$ från $(1,0)$ till $(0,2)$ närmaste bvägen. (3p)

7. Visa att funktionen $f(x) = \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ är kontinuerlig för $x \geq 0$ och beräkna $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$. (3p)

8. Beräkana kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$, där γ är kurvan $\boldsymbol{r} = (1+\cos t, 1+\sin t, 1-\cos t-\sin t)$ för $0 \leq t < 2\pi$ och $\boldsymbol{f} = (ye^x, x^2+e^x, z^2e^z)$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$