

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

1. Antag att  $f$  är en integrerbar funktion på rektangeln  $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ . (3p)

Visa att  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ , givet att enkelintegralerna existerar.

2. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)

(Triangelolikheten för absolutkonvergenta serier får anses bekant.)

3. Antag att  $(f_n)$  är en följd  $C^1$ -funktioner på ett intervall  $I = ]a, b[$  som konvergerar i minst en punkt i  $I$ . Visa att om då  $(f'_n)$  konvergerar likformigt på  $I$  så konvergerar  $(f_n)$  likformigt på  $I$  mot en  $C^1$ -funktion  $f$  med  $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  (4p)

4. Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} y^3 dx + (x^3 + 6xy^2) dy$$

då  $\gamma$  är randen till området som ges av olikheterna  $0 < y < x, x^2 + y^2 < 1$ , genomlöst ett varv medurs.

5. Beräkna arean av den del av ytan  $z = x^2 + xy - y^2$  där  $x^2 + y^2 \leq 1$ . (3p)

6. Beräkna trippelintegralen  $\iiint_D \frac{\sin z}{z} dx dy dz$ , där  $D$  är konen  $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1$ . (3p)

7. Beräkna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{n+x} dx$ . (3p)

8. Bestäm en potensserie som är lösning till differentialekvationen  $xy'' + y' - y = 0, y(0) = 1$ . Bestäm också dess konvergensradie. (3p)

Lycka till!

# Formelblad

## Trigonometriska formler

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

## Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2 + a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2 - a} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \cdot \left( x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right)$$

## Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

## Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n), \quad \text{där } \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{då } n \rightarrow \infty.$$