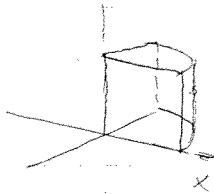


- ① Sats 9.4 i P-B.
- ② Sats 2.12 i GLO.
- ③ Sats 9.1 i P-B.

④ Cylindrisk koordinater ger:

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta (r dz) dr \right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$



⑤ Parameterframställning: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2}$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left((\sin t + \frac{2}{\sin t})(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t \right) dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\sin^2 t - \cos^2 t + 2) dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos 2t + 2) dt =$$

$$= \left[-\frac{\sin 2t}{2} + 2t \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \pi}}$$

⑥ $z_x = x, z_y = -y \Rightarrow dS = \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ och

$$\iint_D xy dS = \iint_D xy \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy =$$

Y $\int$ polära koordinater $\int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1+r^2} dr d\theta =$

$$\left[\frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/4} \int_0^1 r^3 \sqrt{1+r^2} dr = \text{partiell integration} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{r^2}{3} (1+r^2)^{3/2} \right]_0^1 - \frac{1}{6} \int_0^1 r (1+r^2)^{3/2} dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{30} \left[(1+r^2)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{30} + \frac{1}{30} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}+1}{30}}}$$



⑦ Konvergensradie: $\left(\frac{2^n + 3^n}{n^n} |z|^{2n} \right)^{1/n} =$

$$= \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)^{1/n} 3 |z|^2 \rightarrow 3 |z|^2 \text{ då } n \rightarrow \infty, \underline{R = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$: Sätt $z = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\theta}$. Vi får serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{n^n} (-e^{i2\theta})^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1}{n^n} e^{i(2\theta + \pi)n}$$

Klart att $\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1$ avtar. Eftersom $\left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(2\theta + \pi)n} \right|$

$$\leq \frac{1}{|\sin \frac{2\theta + \pi}{2}|}$$

så ger Dirichlets test att serien är konvergent då $\frac{2\theta + \pi}{2} \neq m\pi$ dvs $\theta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$. Svar konvergent för $|z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, z \neq \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$

⑧ Vi ser att $n \ln(1 + \frac{x}{n}) = x \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{(\frac{x}{n})} \rightarrow x$ punktvis då $n \rightarrow \infty$. Vi behöver visa att konvergensen är likformig.

$$\left| n \ln(1 + \frac{x}{n}) - x \right| = n \left| \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{x^3}{n^3}\right) - \frac{x}{n} \right| =$$

$$= n \left| \frac{x^2}{2n^2} (1 + O(\frac{x}{n})) \right| \leq (\text{stora } n) \leq n \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{1}{n}$$

Eftersom $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (oberoende av x) så gäller att konvergensen är likformig

och $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \ln(1 + \frac{x}{n}) dx = \int_0^1 x dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$