

Lösningar till
MMG 300-2
2014-06-03

- ① Sats 9.2 i P-B.
② Sats 2.13 i GLO.
③ Sats 6.3 i P-B

④ Sätt $\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}(u+v)$

$\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| = 3, \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| = \frac{1}{3}$

$\iint_D x \, dx \, dy = \frac{1}{9} \iint_{D'} (u+v) \, du \, dv =$

$= \frac{1}{9} \int_{-3}^6 \left[\frac{u^2}{2} + uv \right]_0^3 dv = \frac{1}{9} \int_{-3}^6 \left(\frac{9}{2} + 3v \right) dv = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2}v + \frac{v^2}{2} \right]_{-3}^6 = 9$

⑤ Konvergensradie: $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}} e}{(1+n^2)^{\frac{1}{2n}}} |z|^2 \rightarrow e|z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < e^{-1/2} = R$

Om $|z| = e^{-1/2}$ får vi att

$|a_n| = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}} \rightarrow 1$, dvs termerna går ej mot 0. Serien är därför divergent för $|z| = R = e^{-1/2}$. Svar: Konvergent då $|z| < \frac{1}{\sqrt{e}}$

⑥ Integralen kan skrivas $\iint_Y (y, x, z) \cdot \vec{N} \, dS =$

$=$ med $\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, v) =$

$= \iint_D (u \sin v, u \cos v, v) \cdot (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) \, du \, dv =$
 $(= (\sin v, -\cos v, u))$

$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} u \sin^2 v - u \cos^2 v + uv \right) dv \, du =$
 $= \int_0^2 \left[\frac{uv^2}{2} - \frac{u}{2} \sin 2v \right]_0^{2\pi} du = \pi^2 [u^2]_0^2 = 3\pi^2$

⑦ Gauss' sats: $\iint_Y \vec{F} \cdot \vec{N} \, dS =$

$= \iiint_{D'} \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \iiint_D (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy \, dz$

$= \int_0^1 \left(\iint_{D_z} (1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy \right) dz =$

$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} (1 + r^2) r \, dr \, d\theta \right) dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_0^{1-z} dz =$

$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{(1-z)^2}{2} + \frac{(1-z)^4}{4} \right) dz = \left[\frac{(1-z)^3}{6} - \frac{(1-z)^5}{20} \right]_0^1 2\pi = \frac{13\pi}{30}$

⑧ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $u_n(x) = \frac{x+n}{1+(x+n)^4}$

Eftersom $|u_n(x)| \leq \frac{1+n}{n^4} < 2 \frac{1}{n^3}$ för $x \in [0, 1]$ och

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ är konvergent så är $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

likformigt konvergent enligt Weierstrass.

Då är $\int_0^1 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x+n}{1+(x+n)^4} \, dx =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [\arctan(x+n)^2]_0^1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(n+1)^2 - \arctan n^2)$

och $S_k = \frac{1}{2} (\arctan 2^2 - \arctan 1^2 + \arctan 3^2 - \arctan 2^2 +$
 $+ \dots = \frac{1}{2} (\arctan k^2 - \arctan 1) \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8}$