

Lösningar till
MMG 300 del 2
2014-08-26

① Sats 6.2 i P-B

② Sats 2.9 i GLO

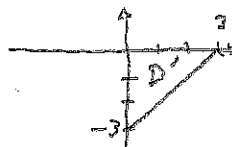
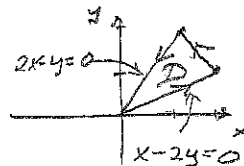
③ Sats 2.12 i GLO

④ Sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{e^{-r^2}}{r} \cdot r^2 \sin \theta \right) dr \right) d\theta d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^1 r e^{-r^2} dr = \\ &= \frac{\pi}{2} [-\cos \theta]_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

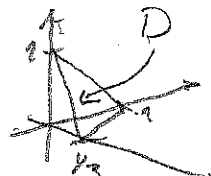
⑤ Greens formel ger

$$\begin{aligned} & \iint_D (4x - 2y) dx dy = \begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 2y \end{cases} \\ & \left| \frac{dx dy}{du dv} \right| = \frac{1}{3} \} = \\ &= \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{3} \int_0^{v+3} 2u du \right) dv = \int_{-3}^0 \frac{1}{3} (v+3)^2 dv = \\ &= \frac{1}{9} \left[(v+3)^3 \right]_{-3}^0 = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$



⑥ Gauss' sats ger $\iiint_D \text{div } F dx dy dz =$

$$= \int_0^{1/3} \left(\int_0^{1-3x} \left(\int_0^{1-3x-y} dz \right) dy \right) dx =$$



$$\begin{aligned} &= \int_0^{1/3} 2x \left(\int_0^{1-3x} (1-3x-y) dy \right) dx = \int_0^{1/3} x \left[-(1-3x-y)^2 \right]_0^{1-3x} dx = \\ &= \int_0^{1/3} x(1-3x)^2 dx = \int_0^{1/3} (9x^3 - 6x^2 + x) dx = \left[\frac{9}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^{1/3} = \underline{\underline{\frac{1}{108}}} \end{aligned}$$

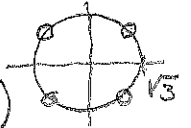
⑦ $|a_k|^{1/k} = \frac{1}{9} \frac{|z|^{1/k}}{k^{1/k}} \rightarrow \frac{|z|^{1/k}}{9} < 1 \Leftrightarrow |z| < 9^k. \quad R = \sqrt{3}$

För $|z| = \sqrt{3}$, sätt $z = \sqrt{3} e^{i\theta}$. Vi får serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{i4\theta k}}{k^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i(4\theta + \pi)k}}{k^k}.$$

$\frac{1}{k^k} \searrow 0$ så enligt Dirichlets sats är serien konvergent för $4\theta + \pi \neq n \cdot 2\pi$, dvs för $\theta \neq (2n-1)\frac{\pi}{4}$. Serien är alltså

konvergent då $|z| \leq \sqrt{3}$, $z \neq \pm \sqrt{\frac{3}{2}}(1 \pm i)$



⑧ $f_n(0) = 1$, $f_n(1) = 0$ och för $0 < x < 1$ gäller att $x^n \rightarrow 0$, så $f_n(x) \rightarrow 1-x$ punktvis i $[0, 1]$.

Likformigt? $|f_n(x) - (1-x)| = (1-x)x^n = g_n(x)$.

Derivera $g'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-x(n+1))$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n}{n+1}$ som är ett max.

$$|f_n(x) - (1-x)| \leq g\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq$$

$$\leq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ och beröras av.}$$

Alltså $f_n(x) \rightarrow (1-x)$ Likformigt