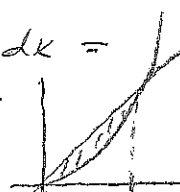


Lösningar till
MMG 300 del 2
2015-04-14

- ① Satz 6.3 i P-B
② Satz 2.13 i GLO
③ Satz 3.5 i GLO

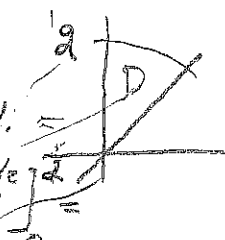
$$\begin{aligned} \textcircled{4} \int_0^1 x \left(\int_{x^2}^x e^{-2y} dy \right) dx &= \int_0^1 -\frac{x}{2} [e^{-2y}]_{x^2}^x dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} e^{-2x^2} dx - \int_0^1 \frac{x}{2} e^{-2x} dx = \\ &= \left[-\frac{1}{8} e^{-2x^2} \right]_0^1 - \left(\left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-2x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} e^{-2} + \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{8} [e^{-2x}]_0^1 = \dots = \frac{1}{4} e^{-2} \end{aligned}$$


$$\textcircled{5} R=3 \quad \left| \frac{n3^n}{(1+n)e^n} z^{2n} \right|^{1/n} = \frac{n^{1/n} \cdot 3}{(1+n)^{1/n} e} |z|^2 \rightarrow \frac{3|z|^2}{e} < 1$$

$$\Leftrightarrow |z| < \sqrt{\frac{e}{3}} = R$$

För $|z| = \sqrt{\frac{e}{3}}$ får vi att $\left| \frac{n3^n}{(1+n)e^n} z^{2n} \right| = \frac{n}{1+n} \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$, dvs termerna går ej mot 0, serien diverger.

Serien konvergerar alltså för $|z| < \sqrt{\frac{e}{3}}$

$$\begin{aligned} \textcircled{6} A &= \iint_D dS = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy = \\ &= \iint_D \sqrt{1+y^2+x^2} dx dy = \text{polära koord.} = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^2 r \sqrt{1+r^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{3} (1+r^2)^{3/2} \right]_0^2 = \\ &= \frac{\pi}{12} (5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$


⑦ Vi har ett potentialfält med potential ϕ :

$$\phi'_x = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \phi = \int -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2} + g(y). \text{ Då blir}$$

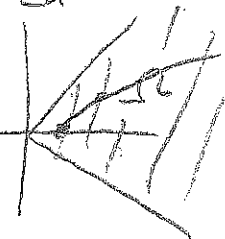
$$\phi'_y = \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) \text{ och vi ser att vi}$$

kan välja $g(y)=0$. $\phi = \frac{1}{x^2+y^2}$ är en

potential i området Ω i fig.

Då blir integralen oberoende av vägen och =

$$\left[\frac{1}{x^2+y^2} \right]_{(1,0)}^{(2,1)} = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$



$$\textcircled{8} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad u_n(x) = \frac{x^2}{(x^3+n)^{1+a}}$$

för $0 \leq x \leq R$ är $|u_n| \leq \frac{R}{n^{1+a}}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n^{1+a}}$ är

konvergent för $a > 0$ så enligt Weierstrass

Konvergerar serien likformigt i $[0, R]$ och då R godtygligt följer att $f(x)$ kontinuerlig i hela $[0, \infty[$.

Vidare gäller enl. satsen om termvis integration att

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+n)^{1+a}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{3a} \left[\frac{1}{(x^3+n)^a} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(n+1)^a} \right) = \frac{1}{3a} \left(1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^a} - \frac{1}{3^a} + \dots \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{3a} \end{aligned}$$

teleskopsumma.