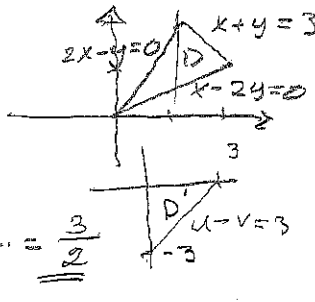


Lösningar till MMG300:2 15-06-03

- ① Sats 3.4 i GLO
- ② Sats 9.3 i P-B.
- ③ Sats 2.12 i GLO

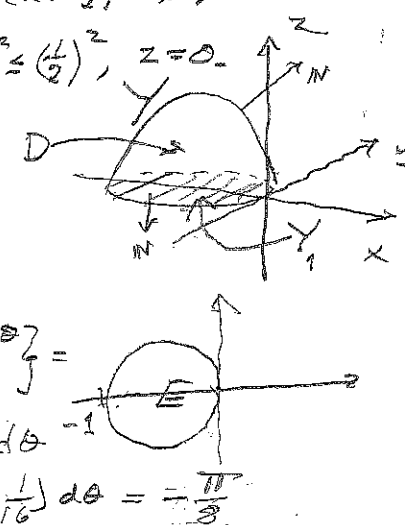
④ $P = (2x + x^2y)e^{xy}$, $Q = x^3e^{xy} + 1$
 Integrera Q : $\Phi = x^2e^{xy} + y$. Då är $\Phi'_x = P$
 $\int_C [x^2e^{xy} + y]_{(0, 3/2)}^{(1, 0)} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$

⑤ Sätt $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 2y \end{cases}$, $|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}| = 3$
 $x + y = u - v$
 $\iint_D y dx dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \iint_{D'} (u - v) du dv =$
 $= \frac{1}{9} \int_0^3 [uv - v^2]_{u=3}^0 du = \frac{1}{9} \int_0^3 (9 - 3u) du = \dots = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$



⑥ $|(-2)^n x^n|^{1/n} = 2|x| \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$
 $R = \frac{1}{2}$. $x = \frac{1}{2}$ ger serien $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ som
 är konvergent enligt Leibniz.
 $x = -\frac{1}{2}$ ger $\sum \frac{1}{n}$ som är divergent
 Serien är konvergent för $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$
 Vi vet att $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1 - (-2x)} = \frac{1}{1+2x}$ om $|x| < \frac{1}{2}$.
 Integrerar vi får vi
 $\frac{1}{2} \ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{x^n}{n}$
 Dvs, seriens summa = $-\ln(1+2x)$

⑦ $z = -(x + x^2 + y^2) = \frac{1}{4} - ((x + \frac{1}{2})^2 + y^2)$
 Lägg till ytan $\gamma: (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2$, $z = 0$.
 Gauss sats ger
 $\iint_{Y+Y_1} \text{div } F dx dy dz = 0$
 $\iint_{Y-Y_1} = \{N = (0, 0, 1)\} =$
 $\iint_{E \cap \{2\pi/4, 3/4\}} (x + \frac{1}{2} = r \cos \theta, y = r \sin \theta) dr d\theta =$
 $= \int_0^{2\pi} \int_{0, 1} (r^2 \cos \theta - \frac{r}{2} + r^2 \sin \theta) dr d\theta =$
 $= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{24} (\cos \theta + \sin \theta) - \frac{1}{16}) d\theta = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$



⑧ $f_n(x) = x^2 \frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} = x^2 \frac{1 + \frac{x^2}{n^2}}{(1 + \frac{x}{n})^2} \rightarrow x^2$ då $n \rightarrow \infty$
 Vi vill visa att konvergensen är likformig.
 $|f_n(x) - x^2| = |x^2 \frac{x^2 + n^2}{(x+n)^2} - \frac{(x+n)^2}{(x+n)^2}| =$
 $= |x^2 \frac{2xn}{(x+n)^2}| \leq \frac{2}{n} |x|^3 < \frac{2}{n} \rightarrow 0$ oberoende
 av x i $[0, 1]$. Det visar att konvergensen
 är likformig och vi får
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx =$
 $= \int_0^1 x^2 dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$