

Lösningar E11
MMG 300: 2
2015-08-25

- ① Sats 9.4: P.B.
② Sats 9.15: P.B.
③ Sats 8.7: GLO.

④ Parameterframställning: $K = (t, t^2, t^3)$
ger $\int_0^2 (t^3 - 1 + t^2 - 2t + t - 3t^3) dt = \int_0^2 (6t^3 - 2t) dt = \underline{\underline{24}}$

⑤ Gauss' sats ger

$$\begin{aligned} \iiint_K (x + y + 2z) dx dy dz &= \\ \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x + y + 2z) dz dy dx &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + y) dy \right) dx = \\ \frac{2}{3} \int_0^1 \left[(x + y)^2 \right]_{y=0}^{1-x} dx &= \frac{2}{3} \int_0^1 x^3 dx = \underline{\underline{\frac{2}{6}}} \end{aligned}$$


⑥ I sfäriska koordinater: $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
och $3z^2 \geq x^2 + y^2 \Leftrightarrow 4z^2 \leq r^2$, där $\cos \theta \geq 1/2$
och $0 \leq \theta \leq \pi/3$. Vi får: (och $x^2 + y^2 = r^2 - z^2$)
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^2 r^2 (1 - \cos^2 \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi &= \\ = 2\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/3} &= \frac{64\pi}{5} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \\ = \underline{\underline{\frac{8\pi}{3}}} \end{aligned}$$

⑦ Konvergenzradien:

$$\left| \frac{(-2)^n z^{3n}}{n^n} \right|^{1/n} = \frac{2|z|^3}{(n^n)^{1/n}} \rightarrow 2|z|^3 < 1 \Leftrightarrow |z| < \sqrt[3]{2} = R$$

För $|z| = \sqrt[3]{2}$, sätt $z = \sqrt[3]{2} e^{i\theta}$. Vi får
 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{i3n\theta}}{n^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in(3\theta+\pi)}}{n^n}$. Då $\frac{1}{n^n} \rightarrow 0$

så ger Dirichlets test att serien är konvergent då $3\theta + \pi \neq k \cdot 2\pi$, dvs $\theta \neq (2k-1)\frac{\pi}{3}$

Svar: konvergent för $z \leq \sqrt[3]{2}$

Utom då $z = -\sqrt[3]{2}$ och $z = \pm \sqrt[3]{2} (1 + \sqrt{3}i)$



⑧ Serien är konvergent ($\neq 0$) för $x \neq 0$

Derivera termerna: $u_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2^n (1+x^{2n})}$

$|u_n'(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{|x|}{2} \right)^n$. Därmed är

$\sum |u_n'|$ likformigt konvergen på varje intervall $[-r, r]$ där $r < 2$. Satsen om termvis derivering ger då att $\sum u_n(x)$ konvergerar likformigt mot en funktion med kont. derivata på $[-r, r]$. Då r kan väljas godtyckligt: $]-2, 2[$ så följer påståendet.

Slutligen:

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$