

Lösningar till
MMG300 del 2
2016-04-05

- ① Sats 3.3 ; GLO
- ② Sats 6.4 ; P-B.
- ③ Sats 2.8 ; GLO

④ Eftersom $\phi'_x - p'_y = 3x^2 - 3x^2 = 0$ så söker vi potential: $\phi'_x = 3x^2y + \cos x \Rightarrow \phi = x^3y + \sin x + h(y)$
 $\phi'_y = x^3 + e^y \Rightarrow h(y) = e^y$, dvs $\phi = x^3y + \sin x + e^y$
 kurvintegralen = $[x^3y + \sin x + e^y]_{(1,0)}^{(2,1)} = \underline{\underline{7 + e + \sin 2 - \sin 1}}$

⑤ Konvergensradie: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)^2|x|^{n+1}}{3^n n^2 |x|^n} = (1+\frac{1}{n})^2 3|x| \rightarrow 3|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} = R$

För $|x| = \frac{1}{3}$ är $|a_n| = n^2 \not\rightarrow 0$ så serien är divergent. Konvergenzintervall: $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$

Summan $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n = \frac{1}{1-(-3x)} = \frac{1}{1+3x}$

Vi vet att (Geometrisk serie). Derivera om $| -3x | < 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n n x^{n-1} = -\frac{3}{(1+3x)^2}$, och $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n n^2 x^{n-1} = -\frac{3x}{(1+3x)^3}$

Derivera igen: $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n n^2 x^{n-1} = \dots = \frac{9x-3}{(1+3x)^3}$

Därmed: $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n n^2 x^n = \underline{\underline{\frac{9x^2-3x}{(1+3x)^3}}}$

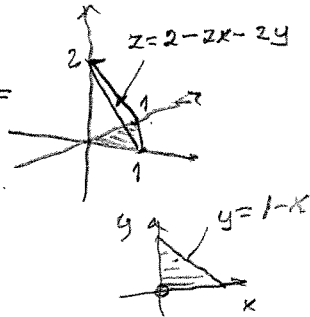
⑥ I polära koordinater: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $r \leq R < \infty$

$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+r^4} \cdot r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{r}{1+r^4} dr =$

$= \left\{ \begin{matrix} t=r^2 \\ dt=2rdr \end{matrix} \right\} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{4} [\arctan t]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} (\frac{\pi}{2} - 0) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$

⑦ Vi använder Gauss' sats

$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_K (2z+0+2z) = 4 \iiint_K z dx dy dz =$
 $= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2-2x-2y} z dz \right) dy \right) dx =$
 $= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [z^2]_0^{2-2x-2y} dy \right) dx =$
 $= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2-2x-2y)^2 dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [-(2-2x-2y)^3]_{y=0}^{y=1-x} dx =$
 $= \frac{8}{3} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{2}{3} [-\frac{1}{4}(1-x)^4]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$



⑧ $f'_n(x) = \frac{n}{1+nx} = \frac{1}{\frac{1}{n}+x} \rightarrow \frac{1}{x}$ punktvis i $[0, \infty)$
 $|f'_n(x) - \frac{1}{x}| = \left| \frac{n}{1+nx} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x(1+nx)} \leq \frac{1}{r(1+nr)} \rightarrow 0$
 Visar att konvergenzen är likformig i $[r, \infty)$.

Med $a_n = \ln(1+n)$ är $f_n(1) = 0$, dvs f_n konvergerar i minst en punkt. Satsen om likformigt konvergens hos derivatan ger att $f_n(x) = \ln(1+nx) - \ln(1+n)$ konvergerar likformigt mot $f(x)$ med $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Dvs $f(x) = \ln x + C$. Men $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$ ger $C=0$ och $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \underline{\underline{\ln x}}$.