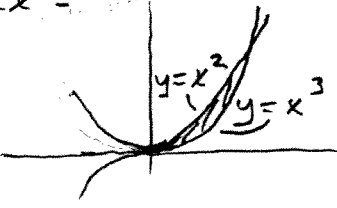


Lösningar till
MMG 300 del 2
2016-05-31

- ① Sats 6.2 i P.B.
② Sats 9.2 i P.B.
③ Sats 2.9 i GLO

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} xy \, dy \right) dx &= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \left[\frac{x^6}{12} - \frac{x^8}{16} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{48}}} \end{aligned}$$


- ⑤ Bestäm en potential

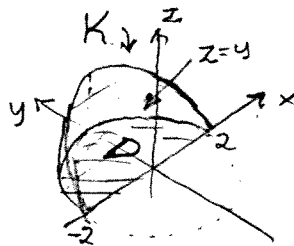
$$\begin{aligned} U'_x &= P \Rightarrow U = xye^z + g(y,z), \quad U'_y = Q \Rightarrow \\ x e^z + g'_y &= x e^z, \text{ dvs } g(y,z) = h(z), \quad U'_z = R \Rightarrow \\ xye^z + h'(z) &= xye^z - 1, \text{ dvs } h(z) = -z \quad (+C) \\ U &= xye^z - z \text{ är en potential. Då är} \\ \int F \cdot dr &= U(1,1,1) - U(0,0,0) = \underline{\underline{e+1}} \end{aligned}$$

- ⑥ Gauss' sats ger att Flödet =

$$= \iiint_K \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iint_D \left(\int_0^y (y+2z) \, dz \right) dx \, dy =$$

$$\iint_D \left[yz + z^2 \right]_{z=0}^y dx \, dy = \iint_D 2y^2 \, dx \, dy =$$



forts. = polära koordinater =

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^\pi \left(\int_0^2 (r \sin \theta)^2 r \, dr \right) d\theta = 2 \int_0^\pi \sin^3 \theta \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta = \\ &= 8 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \underline{\underline{4\pi}} \end{aligned}$$

⑦ Sätt $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Då är $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ och $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$. Sätt in i D.E.

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \quad y'' - y' + y &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((k+1)k a_{k+1} - k a_k + a_k \right) x^k = 0 \text{ då} \\ a_{k+1} &= \frac{1}{(k+1)k} a_k. \text{ Villkoren } y(0)=0, \\ y(1)=1 &\text{ ger } a_k = \frac{1}{k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1} = \frac{1}{(k!)^2} \\ \text{Lösning } y &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^k \text{ som konvergerar för alla } x \end{aligned}$$

- ⑧ För $x \in]0, 1[$ är det en konvergent geometrisk serie och för $x=0, 1$ är termerna = 0. Serien är därmed punktvis konvergent i $[0, 1]$. Likformigt?

Vi kan skriva serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k(x)$ där $a_k(x) = x(1-x)^k \geq 0$. Klart att $a_{k+1}(x) \leq a_k(x)$ för alla x . Vi visar att $a_k(x) \rightarrow 0$ likformigt.

$$\begin{aligned} a_k(x) &= (1-x)^k - kx(1-x)^{k-1} = (1-x)^{k-1} (1 - (k+1)x) \\ \text{Så } a_k(x) &\text{ har max i } \frac{1}{k+1} \text{ och } a_k\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(k+1)^2} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{k}{(k+1)^2} \rightarrow 0. \text{ Konvergensen likformig enligt} \\ \text{Dirichlets sats eftersom } \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| &< 1. \\ \text{Summan} &= x \frac{x-1}{1-(x-1)} = \frac{x^2-x}{2-x}. \end{aligned}$$