Lösningar till
MMG300 del 2
216-08-23

① Sats 6.2 och 6.4 i P-B

② Sats 3.4 i GLO

③ Sats 2.13 i GLO

---

④ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2|x|\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/3} \to 2|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$,

Dvs konvergensradien $R = \frac{1}{2}$.

För $x = \frac{1}{2}$, får vi de alternerande serien $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)^{1/3}}$ som konvergerar enlegt Leibnitz

För $x = -\frac{1}{2}$ får vi $\sum \frac{1}{(n+1)^{1/3}}$ som är divergent då $1/3 < 1$. Svar: konvergent för $-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$

---

⑤ $y = 0 \Rightarrow P = 0$ och $dy = 0$, dvs $\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = 0$, så

$\int_{C_2} = \int_{C_1+C_2} = \left\{\begin{matrix}\text{Greens formel}\\ \text{se fig}\end{matrix}\right\} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \dots =$

$= \iint_D 2y\,dx\,dy = \{\text{polära koord.}\} =$

$= \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 2r^2 \sin\theta\,dr\right)d\theta = \dots = \frac{4}{3}$

---

⑥ ytan beskrivs av $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$, $\underbrace{1 \le x^2+y^2 \le 2}_{D}$

$\iint_D z\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\,dx\,dy = \dots =$

$= \iint_D \sqrt{x^2+y^2-1}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)^2 + 1}\,dx\,dy =$

$= \sqrt{2x^2+2y^2-1}\,dx\,dy =$ polära koordinater $=$

$= \int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{2r^2-1}\,dx\right)d\theta = \frac{\pi}{3}\left[(2r^2-1)^{3/2}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$

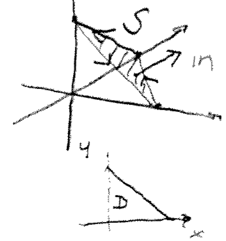
---

⑦ Vi anvander Stokes' sats

$\nabla\times(e^z\sin y - y,\ xe^z\cos y - z,\ xe^z\sin y - x) = \dots =$

$= (1, 1, 1)$. Ytan ges av

$z = 1 - x - y$, $(x,y) = D$: $0 \le y \le 1-x$, $0 \le x \le 1$.



$\int_C \dots = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{N}\,dS =$

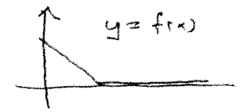
$= \iint_D (1,1,1)\cdot\underbrace{(-z'_x, -z'_y, 1)\,dx\,dy}_{\hat{N}\,dS} =$

$= \iint_D (1,1,1)\cdot(1,1,1)\,dx\,dy = 3\,\text{arean}(D) = \frac{3}{2}$

---

⑧ Med $f_n(x) = \frac{1}{\sum_0^{\infty} x^k} = \frac{1}{1+x+x^2+\dots+x^n}$ gäller att

$f_n(x) \searrow f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{om } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{om } x \ge 1 \end{cases}$



Vi visar att konvergensen är likformig genom att visa att $0 \le f_n(x) - f(x) \le \frac{1}{n}$:

För $x \ge 1$ är $f_n(x) - f(x) = \frac{1}{1+\dots+x^n} \le \frac{1}{1+1+\dots+1} = \frac{1}{n}$

For $x < 1$ är $f_n(x) - f(x) = \frac{1}{1+x+\dots+x^n} - (1-x) =$

$= \frac{1-(1-x)(1+x+\dots+x^n)}{1+x+\dots+x^n} = \frac{1-(1-x^{n+1})}{1+x+\dots+x^n} = \frac{x^{n+1}}{1+x+\dots+x^n} =$

$= \frac{x}{\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{1}{x} + 1} \le \frac{x}{n} < \frac{1}{n}$

Dett visar att $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$

likformigt.