

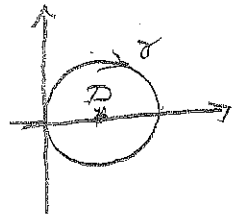
Lösningar till
MMG 300: II
2017-01-03

- ① Sats 3.5: GLO
② Sats 6.3: P-B.
③ Sats 9.3: P-B

④ Sätt $\begin{cases} u = x-y \\ v = 2x+y \end{cases}$ $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 3$ $x-y = -3$ $2x+y = 6$
 $D: \begin{cases} -3 \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq 6 \end{cases}$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3}$
 $3x = u+v \Rightarrow x = \frac{1}{3}(u+v)$. Vi får
 $\iint_D x dx dy = \frac{1}{3} \iint_{D'} (u+v) du dv =$
 $= \frac{1}{18} \int_0^6 [u^2 + 2uv]_{u=-3}^0 dv = \frac{1}{18} \int_0^6 (6v - 9) dv = \frac{1}{6} [v^2 - 3v]_0^6 = 3$

⑤ Konvergensradie: $|a_n| = \frac{(1+n)^{1/n}}{(1+n^2)^{1/2n}}$ $e|z|^2 \rightarrow e|z|^2 < 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow |z| < e^{-1/2} = R$. Om $|z| = R$ får vi
 $|a_n| = \frac{1+n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} \rightarrow 1$, dvs termerna
 går ej mot 0 och serien är då divergent.
 Svar: konvergent för $|z| < \frac{1}{\sqrt{e}}$

⑥ Greens formel ger
 $I = \int 6xy dx + (x^3 + 3xy^2) dy =$
 $= - \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + 3xy^2) - \frac{\partial}{\partial y} (6xy) \right) dx dy =$
 $= \iint_D (6x - 3x^2 - 3y^2) dx dy = 3 \iint_D ((1-x)^2 - y^2) dx dy,$



Polära koordinater kring $(1,0)$: $\begin{cases} x = 1 + r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$
 ger $I = 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1-r^2) r dr \right) dt =$
 $6\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}$

⑦ Lägg till S' med normal
 nedåt så blir $S+S'$ sluten.
 Gauss'sats ger $\iint_{S+S'} (3xz^2, y^3, 1) \cdot N dS =$
 $= \iiint_{D+S'} (3x^2 + 3y^2) dx dy dz = \{ \text{sfäriska koord} \} =$
 $= 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^1 (r^2 - r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) r^2 \sin \theta dr \right) d\varphi \right) d\theta =$
 $= 3 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \left(2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta =$
 $= \frac{3\pi}{5} \int_{\pi/2}^{\pi} (2 \sin \theta - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{3\pi}{5} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta =$
 $= \frac{3\pi}{5} \left[-\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{5}$ Så
 $\iint_S = \frac{4\pi}{5} - \iint_{S'} (3xz^2, y^3, 1) \cdot (0, 0, -1) dS = \frac{4\pi}{5} + \iint_{S'} 1 dS = \frac{9\pi}{5}$

⑧ Derivera $f_n'(x) = \dots = x^n \sin \frac{k+n}{n^2} \Rightarrow k$ för alla x .
 Likformigt på $[-R, R] \cong |x| \leq R$: $|x^n \sin \frac{k+n}{n^2} - x| =$
 $\leq n|x| \left| \sin \frac{k+n}{n^2} - \frac{1}{n} \right| \stackrel{\text{Maclaurin}}{=} n|x| \left| \frac{k+n}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{(k+n)^3}{n^6} O \right| \leq$
 $\leq \{ \text{Om } n \geq R^2 \} \leq \frac{|x|^2}{n} + C \cdot \frac{|x|^4}{n^3} \leq \frac{R^2}{n} + \frac{CR^4}{n^3} \rightarrow 0$ oberoende av x !
 $f_n(0) = n^5 \sin \frac{1}{n^2}$. Med $a_n = n^5 \sin \frac{1}{n^2}$ så konvergerar
 $f_n - a_n$ i $k=0$ och därmed likformigt mot en
 funktion $f(x)$ med $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - a_n)' = x$
 Då är $f(x) = \frac{x^2}{2} + C$. men $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - a_n)(0) = 0$
 Så $a_n = n^5 \sin \frac{1}{n^2}$ ger $f_n(x) - a_n \rightarrow \frac{x^2}{2}$ likformigt