

Lösningar till
MMG300 del 2
2017-05-30

- ① Sats 9.2 i P-B
② Sats 9.1 i P-B
③ Sats 3.3 i GLO

④ $\left| \frac{z^n}{1+n^2} \right|^{1/n} = \frac{1}{(1+n^2)^{1/n}} \cdot |z| \rightarrow |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2} = R$

$|z| = \frac{1}{2} = |a_n z| = \frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$. Då $\sum \frac{1}{n^2}$ är konvergent så ger jmf-kriteriet att serien är konvergent för $|z| \leq \frac{1}{2}$.

⑤ Variabelbytet $\begin{cases} u = x-2y \\ v = 2x+3y \end{cases}$ ger $\begin{matrix} x-2y=-3 \\ 2x+3y=1 \\ 2x+3y=4 \\ x-2y=4 \end{matrix}$

$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{7}$ och

integralen $= \frac{1}{7} \int_{-3}^4 \left(\int_{-3}^4 u du \right) v^{1/3} dv = \frac{1}{7} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-3}^4 \left[\frac{3}{4} v^{4/3} \right]_{-3}^4 = \frac{45}{8}$

⑥ $Q'_x - P'_y = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow$ integralen oberoende av vägen i $\Omega = \{(x,y) : x+y > 0\}$ (som ju är enkelt sammanhängande)

$\int = 0$ eftersom såväl x som $dx = 0$.

$\gamma: (x,y) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ger

$\int = \int_{\gamma} = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta(-\sin\theta) - \cos\theta \cdot \cos\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} (-1) d\theta = -\frac{\pi}{2}$

⑦ $\left| \frac{1}{(x+n)^2} \right| < \frac{1}{n^2}$ för $x \in [0,1]$ och $\sum \frac{1}{n^2}$ är konvergent

Weierstrass sats ger likformig konvergens.

Satsen om termvis integration ger då

$\int_0^1 f(x) dx = \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2} dx = \sum_1^\infty \left[-\frac{1}{x+n} \right]_0^1 =$

$= \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ Men $\sum_1^K \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}) = 1 - \frac{1}{K+1} \rightarrow 1$

Därmed $\int_0^1 f(x) dx = 1$

- ⑧ Kurvan ligger i planet $x+y+z=3$ och omsluter yta S i planet enligt figur. Vi använder Stokes' sats

$\oint_{\partial} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{f}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$

$\text{rot } \mathbf{f} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \times$

$\mathbf{x}(ye^x, x^2e^x, ze^z) = (0, 0, 2x)$

och med parameteriseringen

$(x, y, 3-x-y)$ är $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (1, 1, 1)$ och

$\oint_{\partial} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (0, 0, 2x) \cdot (1, 1, 1) dx dy = \iint_D 2x dx dy =$

$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + 2r \cos\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2 + \frac{2r^3}{3} \cos\theta \right]_{r=0}^1 d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + \frac{2}{3} \cos\theta) d\theta = 2\pi$

