

1. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

b) Visa att om $f(x, y)$ är en C^1 -funktion så är den differentierbar. (4p)

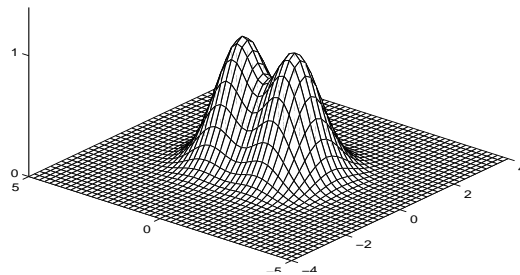
2. Formulera och bevisa satsen om monoton konvergens. (3p)

3. a) Rita några nivåkurvor till funktionerna

$$f(x, y) = y - \cos x \quad \text{och} \quad g(x, y) = \sqrt{x + y}.$$

OBS! Rita tillräckligt många nivåkurvor för respektive funktion, samt ange nivåerna, så att figurerna på ett tydligt sätt illustrerar funktionerna.

b) Skissa nivåkurvor till funktionen med nedanstående graf. (3p)



4. a) Ange i vilken riktning funktionen $f(x, y, z) = x \sin y + yz$ växer snabbast i punkten $(1, \pi/2, 2)$.

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan

$$x \sin y + yz = 1 + \pi$$

i punkten $(1, \pi/2, 2)$. (3p)

5. Finns det kontinuerliga funktioner f sådana att $f(D) = S$ i fallen nedan?
Ge exempel eller motbevis.

a) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

b) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$

c) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$, $S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (3p)

6. Avgör om funktionen $f(x, y, z) = xyz$ antar största och minsta värde då $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Bestäm i så fall dessa. (3p)

7. a) Antag att f är av klass \mathcal{C}^2 . Transformerade differentialekvationen

$$7f''_{xx} + 8f''_{xy} + f''_{yy} = 0$$

genom substitutionen $u = x + my$, $v = x + ny$, där m och n är reella konstanter.

- b) Bestäm alla \mathcal{C}^2 -lösningar till ekvationen.

Ledning: om man väljer m och n lämpligt, blir den transformerade ekvationen enkel att lösa. (3p)

8. Visa att funktionen $f(x) = \ln x$ är likformigt kontinuerlig på $]r, \infty[$ för varje $r > 0$, men inte på $]0, \infty[$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 12 september. Ditt resultat meddelas via mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.