Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2009-01-12, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Ida Säfström, tel 076 272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

1. Visa att varje begränsad punktföljd i $\mathbb{R}^2$ har en konvergent delföljd. (3p)

2. Formulera och bevisa kedjeregeln för en sammansättning på formen

$$t \mapsto f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

där f är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ och $g_1, \ldots, g_n$ är funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. (3p)

3. Ytorna $y = z \sin 2x + 2$ och $z = y^2 - \ln(x+1) - 3$ skär varandra längs en kurva nära punkten $P = (0, 2, 1)$. Bestäm ekvationen för kurvans tangent i P. (3p)

4. Skissa följande delmängder till $\mathbb{R}^2$. Avgör för var och en om den är öppen, sluten, begränsad respektive kompakt (motivering krävs inte!).

   a) $\{(x,y);\ x^2 + 3y^2 \leq 3\}$
   b) $\{(x,y);\ |x| \leq 1,\ |y| < 1\}$
   c) $\{(x,y);\ |(x,y)| \leq 2\} \cup \{(2,2)\}$
   d) $\{(x,y);\ 2x < y < 2x+1\}$

   (4p)

5. Bestäm samtliga stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = 3x^2y + 2y^2x - x\,.$$

Avgör sedan i vilka av dessa punkter som f har lokalt maximum respektive lokalt minimum. (3p)

6. Visa att funktionen

$$f(x,y) = x \sin y \cdot \ln(x^2 + \sin^2 y)$$

kan utvidgas till en funktion F på $\mathbb{R}^2$ så att F är likformigt kontinuerlig på $\{(x,y) : x^2 + y^2 < a\}$ för alla $a > 0$. (3p)

7. Visa att

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)\ln(1+t^2)\,dt$$

är en lösning till differentialekvationen $y'' + y = \ln(1+x^2)$. (3p)

8. Undersök om funktionen f är differentierbar i $\mathbb{R}^2$ om

$$f(0,0) = 0 \text{ och } f(x,y) = \frac{2x^4 + 3y^4 + x^3}{x^2 + y^2} \text{ om } (x,y) \neq (0,0). \qquad \text{(3p)}$$

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 2 februari. Ditt resultat meddelas via mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.