Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2009-03-12, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Oscar Marmon, tel 076 272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

1. Formulera och bevisa Taylors formel av andra ordningen för en funktion i två variabler. (4p)

2. a) Definiera begreppet *Cauchyföljd* i $\mathbb{R}^n$.
   b) Visa att varje Cauchyföljd i $\mathbb{R}^n$ är konvergent. (3p)

3. Låt $f(x, y) = y - \ln x$. Rita nivåkurvorna till f som går genom punkterna $(1, 0)$, $(2, 0)$ och $(4, 0)$. Rita i figuren även ut gradientvektorerna i de nämnda punkterna samt i punkterna $(1, -\ln 2)$ och $(1, -\ln 4)$. Du kan använda approximationen $\ln 2 \approx 0,7$. Tänk på att få figuren principiellt riktig! (3p)

4. Planet $2x + y + z = 4$ skär ytan $x^2 + y^2 - z = 1$ längs en kontinuerligt deriverbar kurva. Bestäm tangenten till denna kurva i punkten $(1, -2, 4)$. (3p)

5. Undersök om funktionen $f(x, y, z) = x + 2y - 3$ har ett största respektive minsta värde då $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$. Bestäm i så fall dessa. (3p)

6. Visa att funktionen
$$f(x, y) = \frac{\sin x^2 y}{x^2 + y^2}$$
är likformigt kontinuerlig på mängden där $x^2 + y^2 \neq 0$. (3p)

7. Lös differentialekvationen
$$f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy} - 2(f'_x + f'_y) = 0$$
där f är av klass $\mathcal{C}^2$, genom att göra substitutionen $u = e^{x+y}$, $v = e^{x-y}$. (3p)

8. Låt a vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt
$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2 + xy = a\}$$
$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 3xy = a\}$$
Förklara varför K och S är slutna mängder för varje a. Visa sedan att K är kompakt för varje a, men att S inte är kompakt för något a. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 2 april. Ditt resultat meddelas via gu-mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.