Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2009-08-17, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 076 272 18 61

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

1. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
   b) Visa att en funktion som är differentierbar i en punkt $\mathbf{a}$ också är partiellt deriverbar i punkten.
   c) Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är partiellt deriverbar men inte differentierbar i $(1,3)$. (4p)

2. Visa att en delmängd M till $\mathbb{R}^n$ är kompakt om och endast om varje punktföljd i M har en konvergent delföljd med gränsvärde i M. (3p)

3. a) Ange i vilken riktning funktionen $f(x,y,z) = x^2y + y^2 - \ln z$ växer snabbast i punkten $(1,2,e)$.
   b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $x^2y + y^2 - \ln z = 5$ i punkten $(1,2,e)$. (3p)

4. Bestäm alla lokala extrempunkter och sadelpunkter till funktionen

$$f(x,y) = x^2y - x\ln y\,. \qquad (3p)$$

5. Avgör om det går att bestämma konstanten a så att funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+xy+y^2} & \text{om } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{om } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $(0,0)$. Hur ska a i så fall väljas? (3p)

6. Motivera varför funktionen $f(x,y) = xy$ antar största och minsta värde under bivillkoret $x^2 + x^4y^4 + y^2 = 3$ samt bestäm dessa. (3p)

7. Låt g vara en given kontinuerlig funktion och visa att

$$f(x) = \frac{1}{4}\int_0^x (e^{2(x-t)} - e^{-2(x-t)})\,g(t)\,dt$$

är en lösning till differentialekvationen $y'' - 4y = g(x)$. (3p)

8. Ge exempel på reellvärda funktioner f och g som är likformigt kontinuerliga på $\mathbb{R}$ men där produkten fg inte är likformigt kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Motivera dina påståenden väl! (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger

Denna skrivning beräknas vara färdigrättad den 7 september. Ditt resultat meddelas via gu-mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.