Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2010-03-11, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

1. Visa att en differentierbar funktion är kontinuerlig. (3p)

2. a) Definiera begreppet *Cauchyföljd* i $\mathbb{R}^n$.
   b) Visa att varje Cauchyföljd i $\mathbb{R}^n$ är konvergent. (3p)

3. Låt $f(x, y, z) = \sin x + \cos y + \tan z$. Bestäm den nivåyta till f som innehåller punkten $(0, \pi/2, \pi/4)$. Bestäm även en ekvation för nivåytans tangentplan i punkten $(0, \pi/2, \pi/4)$. (3p)

4. Skissa följande mängder. Avgör för var och en om den är öppen, sluten, begränsad, kompakt respektive sammanhängande (motivering krävs inte!).
   a) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3;\ |\mathbf{x}| \leq 2\} \cup \{(0, 0, 4)\}$
   b) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2;\ 0 < |\mathbf{x}| \leq 3\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < |x| < 3\}$
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x < y < 2x + 1\}$
   (4p)

5. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 i punkten $(1/\sqrt{2}, 1)$ till funktionen $f(x, y) = x^2 + y - \ln(xy)$.
   Avgör också om $(1/\sqrt{2}, 1)$ är en lokal extrempunkt till f. (3p)

6. Motivera att funktionen
   $$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}$$
   har ett största och ett minsta värde på området
   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$
   Bestäm också dessa värden. (3p)

7. Finn alla lösningar av klass $\mathcal{C}^2$ till den partiella differentialekvationen
   $$xf''_{xx} - yf''_{xy} + f'_x = 0, \quad y > 0,$$
   genom att göra variabelbytet $u = y$, $v = xy$. (3p)

8. Visa att funktionen

$$f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2),\ (x,y) \neq (0,0)$$

inte är likformigt kontinuerlig. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger