Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2010-06-05, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

1. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

   b) Visa att en funktion som är differentierbar i en punkt $\mathbf{a}$ också är partiellt deriverbar i punkten.

   c) Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är partiellt deriverbar men inte differentierbar i origo. (3p)

2. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är likformigt kontinuerlig.

   b) Visa att en funktion f som är kontinuerlig på en kompakt mängd D också är likformigt kontinuerlig på D.

   c) Visa att funktionen $f(x) = x \ln x$ är likformigt kontinuerlig på intervallet $]0, 1]$. (4p)

3. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Motivera!

   a) Om funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig så är $\{(x, y);\ 0 \leq f(x, y) \leq\ 1\}$ kompakt.

   b) Mängden $\{(x, y); x^2 + y^3 < \sin(x - y)\}$ är öppen. (3p)

4. a) Ange i vilken riktning funktionen $f(x, y, z) = \tan z - x^3 - xy^2$ växer snabbast i punkten $(-1, 2, \pi/4)$.

   b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $\tan z - x^3 - xy^2 = 6$ i punkten $(-1, 2, \pi/4)$. (3p)

5. Transformera differentialekvationen $xf'_x + yf'_y = x + y$ till de nya variablerna u och v, där $u = x/y$ och $v = y$.

   Bestäm sedan en funktion $f(x, y)$ som satisfierar den ursprungliga differentialekvationen för alla (x, y) med $y > 0$ samt uppfyller villkoret $f(x, 1) = x^2 + x + 1$. (3p)

6. Bestäm de punkter på kurvan $x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 14$ som ligger närmast respektive längst bort från origo. (3p)

Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2010-06-05, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

7. Låt $f(x,y) = (2x-y)^2(x-4)$.

   a) Bestäm alla stationära punkter till f.

   b) Bestäm, för varje stationär punkt, motsvarande kvadratiska form samt avgör dess karaktär.

   c) Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till f. (3p)

8. Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara likformigt kontinuerlig. Visa att följden $(f(x_k))$ är en Cauchyföljd i $\mathbb{R}^m$ om (x_k) är en Cauchyföljd i $\mathbb{R}^n$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger