Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2010-08-26, kl 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

1. Formulera och bevisa satsen om monoton konvergens. (3p)

2. Låt $f$ och $g$ vara av klass $\mathcal{C}^1$. Antag att $(a, b)$ är en inre punkt i $D_f$ och i $D_g$ som löser problemet att maximera $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Visa att då är grad$f(a, b)$ och grad$g(a, b)$ parallella. (3p)

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen av funktionen $f(x, y) = x^2y + 3xy$ i den punkt där $x = 1$ och $y = 2$. (3p)

4. Skissa följande mängder i planet. Ange (utan bevis) deras slutna hölje samt vilka som är öppna respektive slutna.

   a) $M = \{(x, y);\ 0 < 2x^2 + 3y^2 \leq 6\}$.
   b) $M = \{(x, y);\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0\}$.
   c) $M = \{(x, y);\ xy < 1\}$.
   d) $M = \{(x, y);\ xy^2 > 0\}$. (4p)

   OBS. Var noga så att det i figurerna verkligen framgår vilka punkter som tillhör mängderna!

5. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y) = (x+y)\exp(-2xy)$ och bestäm deras karaktär (lokal maximipunkt, lokal minimipunkt eller sadelpunkt). (3p)

6. Lös den partiella differentialekvationen

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$$

   genom att göra variabelbytet

$$\begin{cases} u &= ax + y^2 \\ v &= y \end{cases}$$

   för lämplig konstant $a$. (3p)

7. Avgör om funktionen

$$f(x, y, z) = (\sin x + \cos 3y) \arctan z$$

är likformigt kontinuerlig på $\mathbb{R}^3$. (3p)

8. Låt

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 2y^4 - x^3}{x^2 + y^2}$$

för $(x, y) \neq (0, 0)$. Avgör om, och i så fall hur, man kan definiera $f(0, 0)$ så att $f$ blir differentierbar i $(0, 0)$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger