Tentamensskrivning i Flervariabelanalys del 1, MMG300.
Tid: 2011-03-10, kl 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: tel 0703 08 83 04

MATEMATIK
Göteborgs Universitet

---

1. Formulera och bevisa satsen om monoton konvergens. (3p)

2. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är differentierbar i en punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
   b) Visa att om $f(x, y)$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion så är den differentierbar. (4p)

3. Låt $f(x, y) = \sin(y - x^2)$.
   a) Beskriv och skissa nivåkurvan $f(x, y) = 0$.
   b) Rita mer detaljerat de delar av nivåkurvan som innehåller punkterna $(1, 1-\pi)$, $(1, 1)$ och $(1, 1+\pi)$. Rita i figuren även ut gradientvektorerna i de nämnda punkterna. (4p)

4. Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $xy + xy^2 = z^2 - 7$ i punkten $(-1, 2, -1)$ om det finns. (3p)

5. Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x, y) = x^2 + 3xy + xy^2$ och bestäm deras karaktär (lokal maximipunkt, lokal minimipunkt eller sadelpunkt). (4p)

6. Bevisa eller motbevisa följande påståenden.
   a) Mängden $\{(\sin(xy), \ln(x^2 + y^2), xy) \in \mathbb{R}^3;\ 1 \leq x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ är kompakt. (2p)
   b) Mängden $\{(x, y, z);\ 2x^2 + 3y^2 < z < 12 - 4x^2 - y^2,\ 3x^2 + 2y^2 \leq 6\}$ är öppen i $\mathbb{R}^3$. (2p)

7. Undersök om funktionen

$$f(x, y) = \frac{\arctan x^2 y}{x^2 + y^2}$$

   är likformigt kontinuerlig i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (3p)

Lycka till!
Ulla Dinger